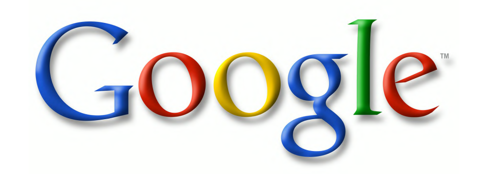
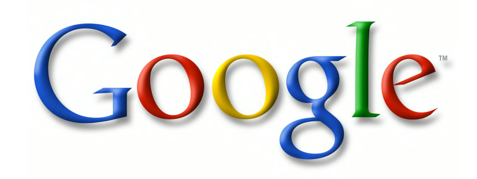
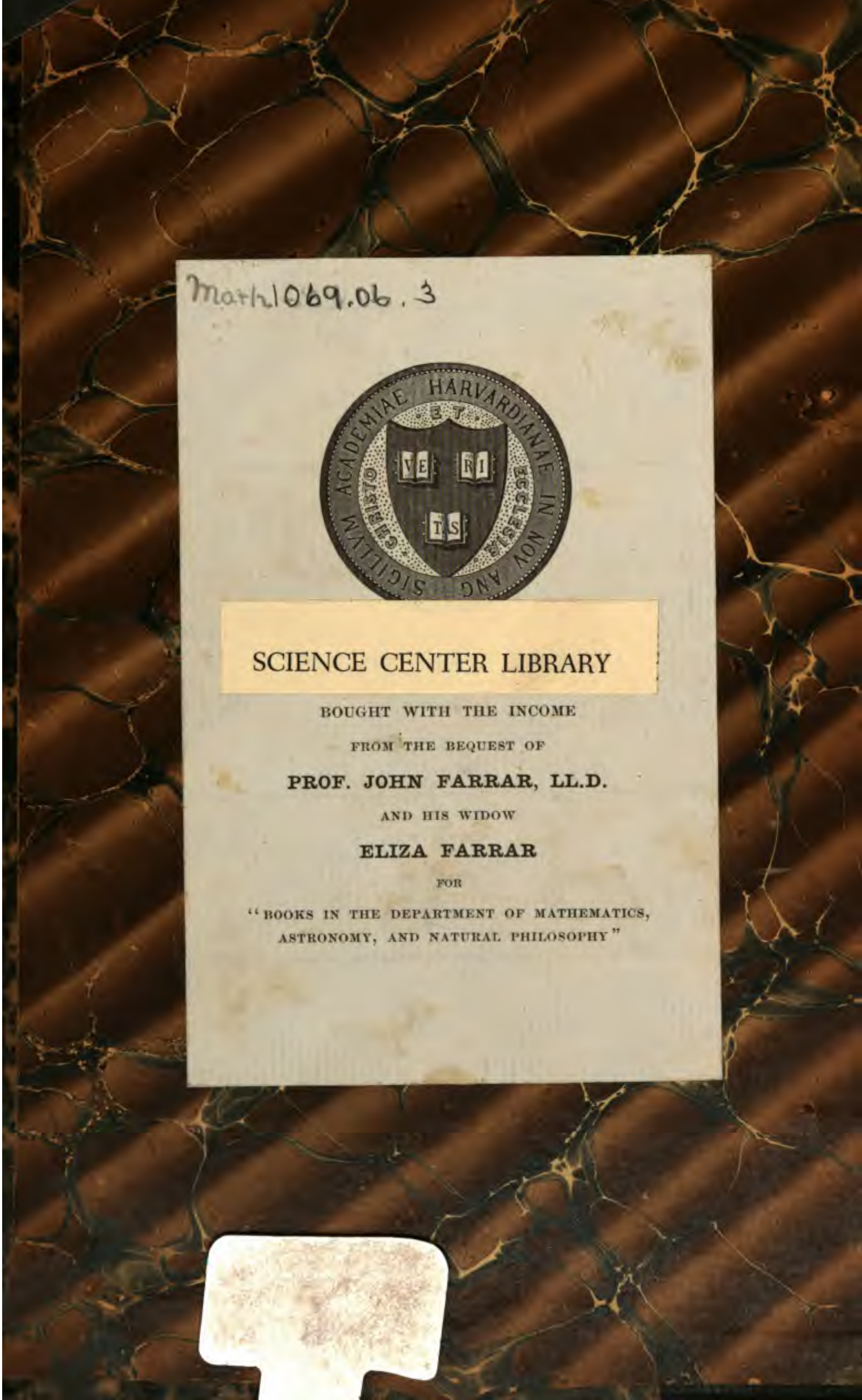





Math1069.06.3
SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS
SCIENCE CENTER LIBRARY
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.
AND HIS WIDOW
ELIZA FARRAR
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"



THÉORIE ET PRATIQUE

DES

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES

PAR

Ch. FASSBINDER,

PROFESSEUR DU COURS PRÉPARATOIRE A L'ÉCOLE NAVALE
AU COLLÈGE STANISLAS.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

THÉORIE ET PRATIQUE

DES

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
37815 Quai des Grands-Augustins, 55.

THÉORIE ET PRATIQUE

DES

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES.

PAR

CH. FASSBINDER,

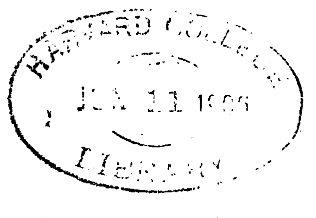
PROFESSEUR DU COURS PRÉPARATOIRE A L'ÉCOLE NAVALE
AU COLLÈGE STANISLAS.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906


HARVARD COLLEGE
LIBRARY

AVERTISSEMENT.

Les trois premiers Chapitres de cet Ouvrage ne sont que le développement de la partie des programmes officiels concernant les erreurs. Pour tout ce qui regarde les erreurs absolues, il a été fait de larges emprunts à la méthode et aux idées exposées par M. Guyou dans sa *Note sur les approximations numériques*.

Dans le Chapitre suivant se trouvent démontrées les règles des opérations arithmétiques abrégées, règles qui ont leur place tout indiquée à la suite d'une théorie élémentaire des erreurs.

Le dernier Chapitre, qui ne rentre pas dans les programmes actuels, suppose connus le calcul des dérivées et le théorème des accroissements finis.

De nombreux exercices sont traités dans le texte; à la fin du Volume, on en a indiqué d'autres. Quelques-uns sont empruntés à l'*Arithmétique* de Serret et aux

Ouvrages de MM. Combette, Humbert, Tannery et Griess. Les derniers exercices sont ceux qui ont été proposés aux concours d'admission à l'École Navale et aux Écoles d'Arts et Métiers depuis 1885. Ceux qui sont marqués d'un astérisque ne peuvent être résolus que par la méthode du Chapitre V.

THÉORIE ET PRATIQUE

DES

APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions fondamentales : erreur absolue, erreur relative, nombre de chiffres exacts.

---

1. **Définitions.** — Soit a la valeur exacte d'un nombre : un autre nombre a' différent de a s'appelle une *valeur approchée* de a, *par défaut* ou *par excès*, suivant que a' est inférieur ou supérieur à a. La différence entre les deux nombres a et a' s'appelle l'*erreur absolue* (ou simplement l'*erreur*) *du nombre approché* a'. Si α est cette erreur, on a, suivant qu'elle est p. d. ou p. e. [1],

$$a' = a - \alpha \qquad \text{ou} \qquad a' = a + \alpha.$$

Ainsi, soit le nombre

$$a = 7541,82907.$$

Le nombre 7500 est une valeur approchée de a p. d. :

---

[1] Les abréviations p. d., p. e. signifient par défaut, par excès.

l'erreur est 41,82907. Le nombre 7541,82 est une autre valeur approchée p. d. de a : l'erreur est 0,00907. Le nombre 7541,9 en est une valeur approchée p. e. : l'erreur est 0,07093, etc.

Dans la plupart des cas, les nombres ne sont pas connus exactement : on n'en connaît que des valeurs approchées. On n'a pas non plus exactement les erreurs dont sont affectés ces nombres approchés : on sait seulement, en général, que l'erreur est inférieure à un certain nombre qu'on appelle une *limite supérieure de l'erreur absolue.*

Si, par exemple, on sait que le nombre $a' = 2,64785$ est une valeur approchée p. d. d'un nombre a avec une erreur absolue au plus égale à 0,003, on en conclut que a est compris entre

$$a' = 2,64785 \qquad \text{et} \qquad a_1 = 2,64785 + 0,003 = 2,65085 :$$

on exprime cela en disant que a_1 est une *limite supérieure du nombre a* et que a' est une *limite inférieure du nombre a.* Si l'erreur est p. e., le nombre a est compris entre

$$a' = 2,64785 \qquad \text{et} \qquad a_2 = 2,64785 - 0,003 = 2,64485 :$$

a' est alors une limite supérieure et a_2 une limite inférieure de a. Si, enfin, on ignore le sens de l'approximation, on peut seulement dire que a est compris entre a_1 et a_2 : a_1 et a_2 sont ici les limites supérieure et inférieure de a. Dans tous les cas, 0,003 est une limite supérieure de l'erreur absolue du nombre a'.

Remarque. — Un nombre peut être affecté simultanément de deux erreurs et même davantage. Si ces deux erreurs sont de même sens, elles s'ajoutent pour produire une erreur de même sens égale à leur somme;

si elles sont de sens contraire, elles se retranchent pour produire une erreur égale à leur différence et de même sens que la plus grande. Si l'on connaît simplement les sens et les limites supérieures des erreurs, elles produisent, si elles sont de même sens, une erreur de même sens au plus égale à la somme de leurs limites, et, si elles sont de sens contraire, une erreur de sens inconnu au plus égale à la plus grande des deux limites.

2. Théorème I. — *Si dans un nombre on supprime tous les chiffres suivant un chiffre déterminé, on commet une erreur par défaut inférieure à une unité de l'ordre de ce chiffre. Il en est de même si l'on force d'une unité le dernier chiffre conservé, mais l'erreur est par excès* (1).

Ce théorème résulte immédiatement de ce que, dans tout nombre, l'ensemble des chiffres suivant un chiffre déterminé forme un nombre compris entre zéro et une unité de l'ordre de ce chiffre.

Supposons, par exemple, qu'on considère le nombre $\pi = 3,1415926535\ldots$ et qu'on supprime le chiffre suivant le chiffre des dix-millièmes. On a

$$0 < 0,0000926535\ldots < 0,0001,$$

d'où, en ajoutant 3,1415 à ces trois nombres,

$$3,1415 < 3,1415926535\ldots < 3,1416.$$

Les nombres 3,1415 et 3,1416 sont donc deux valeurs approchées de π, la première p. d., la seconde p. e.,

(1) Dans les suppressions de chiffres, on doit veiller à ce que le premier chiffre significatif à gauche du nombre donné représente toujours des unités du même ordre.

et leur erreur est inférieure à la différence entre 3,1415 et 3,1416, c'est-à-dire inférieure à 0,0001, ce qui démontre le théorème.

3. **Définitions.** — On dit qu'un nombre est approché *à moins d'une unité d'un certain ordre*, entier ou décimal, lorsque son erreur est inférieure à une unité de cet ordre, p. d. ou p. e. Ainsi 45000 est une valeur approchée p. d. du nombre 45866,742 à moins d'une unité du quatrième ordre p. d., et 45866,75 est une valeur approchée p. e. du même nombre à moins d'une unité du second ordre décimal.

Plus généralement, un nombre est approché à moins de p unités d'un certain ordre lorsque son erreur est inférieure à p unités de cet ordre, p. d. ou p. e.

4. Nous emploierons constamment dans la suite les notations suivantes :

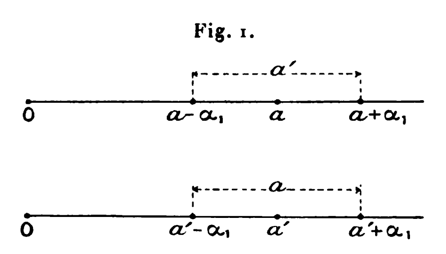
les lettres sans accent a, b, c, ... désigneront les nombres exacts;
les lettres avec accent a', b', c', ... désigneront des valeurs approchées de ces nombres;
les lettres grecques α, β, γ, ... les erreurs absolues correspondantes;
les lettres avec l'indice 1 ($a_1, b_1, c_1, \ldots$) désigneront des limites supérieures des nombres a, b, c, ...;
les lettres avec l'indice 2 (a_2, b_2, c_2, ...), des limites inférieures de ces nombres;
les lettres grecques avec l'indice 1 ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$), des limites supérieures des erreurs α, β, γ, ...

Avec ces notations, le nombre a' est compris entre $a - \alpha_1$ et $a + \alpha_1$; réciproquement, si a' est compris entre $a - \alpha_1$ et $a + \alpha_1$, a' est une valeur approchée

de a avec une erreur inférieure à α_1. De même, le nombre α est compris entre $a' - \alpha_1$ et $a' + \alpha_1$; réciproquement, si a est compris entre $a' - \alpha_1$ et $a' + \alpha_1$, a' est une valeur approchée de a, avec une erreur inférieure à α_1.

Les figures ci-dessous, dans lesquelles on suppose a et a' représentés par des longueurs portées sur une

Fig. 1.



droite à partir d'un point O (*fig.* 1), résument les conclusions qui précèdent.

5. Définition. — On nomme *erreur relative* d'une valeur approchée d'un nombre exact le quotient de l'erreur absolue du nombre approché par le nombre exact. On a donc, en appelant α' l'erreur relative, α l'erreur absolue et a le nombre exact,

$$(1) \qquad \alpha' = \frac{\alpha}{a}.$$

La même relation permet de passer de l'erreur relative à l'erreur absolue. On a, en effet,

$$(2) \qquad \alpha = a\alpha'.$$

Comme on ignore le plus souvent les valeurs exactes des nombres et des erreurs, on ignore également les valeurs exactes des erreurs relatives; mais on peut en

trouver une limite supérieure. On déduit en effet de la relation (1)

$$\alpha' < \frac{\text{lim. sup. de } a}{\text{lim. inf. de } a}.$$

Si donc on conserve les notations du n° 4, $\frac{\alpha_1}{a_2}$ est une limite supérieure de l'erreur relative du nombre a'.

Inversement, lorsqu'on connaît des limites supérieures de a et de α', on a, d'après la relation (2),

$$\alpha < \text{lim. sup. de } a \times \text{lim. sup. de } \alpha'.$$

Si donc on désigne par α'_1 une limite supérieure de l'erreur relative, $a_1 \alpha'_1$ est une limite supérieure de l'erreur absolue du nombre a'.

6. Le degré d'exactitude d'une valeur approchée est bien mieux indiqué par son erreur relative que par son erreur absolue. Ainsi, dans la mesure d'une longueur de 3^{cm}, une erreur absolue de 1^{cm} est considérable; elle est au contraire très faible quand elle affecte une longueur de 3^{km}.

7. **Définition.** — On dit qu'un nombre approché a *n chiffres exacts, à partir du premier chiffre significatif à gauche* [1], lorsque après la suppression de tous les chiffres suivant le $n^{\text{ième}}$ on obtient un nombre dont l'erreur absolue est moindre qu'une unité de l'ordre du $n^{\text{ième}}$ chiffre.

Soit, par exemple, le nombre $a' = 135,67275$. Ce nombre a cinq chiffres exacts si, après avoir supprimé tous les chiffres suivant le cinquième, on obtient un nombre 135,67 qui diffère du nombre exact a, dont a'

(1) Nous sous-entendrons le plus souvent ces derniers mots.

est une valeur approchée, de moins de 0,01, en plus ou en moins. Si l'approximation est p. d., le nombre exact est compris entre 135,67 et 135,68, de sorte que le cinquième chiffre appartient au développement décimal du nombre. Si l'approximation est par excès, le nombre exact est compris entre 135,66 et 135,67, de sorte que le cinquième chiffre n'appartient pas au développement décimal du nombre.

On voit donc que, lorsqu'un nombre a n chiffres exacts, le $n^{ième}$ chffre peut être supérieur d'une unité au chiffre de rang n du développement décimal du nombre exact.

8. Lorsque la limite de l'erreur absolue d'un nombre approché est supérieure à une unité de l'ordre de son dernier chiffre à droite, il y a lieu, pour simplifier l'écriture du nombre, de supprimer les chiffres sur lesquels on ne peut compter; cette suppression se fait à l'aide du théorème suivant :

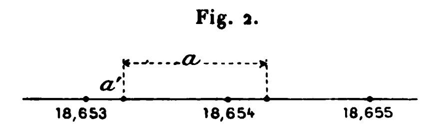
THÉORÈME II. — *Si l'erreur absolue d'un nombre approché p. d. est inférieure à une unité de l'ordre du* $n^{ième}$ *chiffre, le nombre obtenu en écrivant ces* n *chiffres et forçant le* $n^{ième}$ *d'une unité a* n *chiffres exacts. Si l'approximation est p. e., le nombre obtenu en écrivant les* n *chiffres a* n *chiffres exacts, sans qu'on ait besoin de forcer le dernier. Si enfin l'on ignore le sens de l'approximation, le nombre obtenu en écrivant les* $n-1$ *premiers chiffres a* $n-1$ *chiffres exacts : toutefois, si le* $n^{ième}$ *chiffre est un* 9, *il faut forcer d'une unité le* $(n-1)^{ième}$.

Soit le nombre $a' = 18,65326$ approché à moins de 0,001, c'est-à-dire à moins d'une unité de l'ordre du

cinquième chiffre. Supposons que nous connaissions le sens de l'approximation et considérons le nombre 18,653.

Si a' est approché p. d. (*fig.* 2), en prenant le nombre

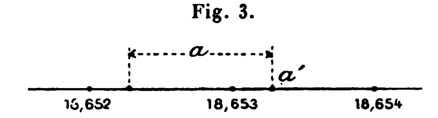
Fig. 2.



18,653 nous augmentons l'erreur de 26 cent-millièmes, c'est-à-dire de moins de 100 cent-millièmes ou 0,001 : donc 18,653 est une valeur approchée p. d. à moins de 0,002. Si nous forçons le dernier chiffre d'une unité, le nombre 18,654 diffère du nombre exact a de moins de 0,001, p. d. ou p. e. Donc le nombre 18,654 a cinq chiffres exacts.

Si a est approché p. e. (*fig.* 3), en prenant le nombre

Fig. 3.



18,653 nous diminuons l'erreur de 26 cent-millièmes, c'est-à-dire de moins de 100 cent-millièmes ou 0,001 ; le nombre 18,653 diffère donc du nombre exact a de moins de 0,001, p. d. ou p. e. : il a, par suite, cinq chiffres exacts.

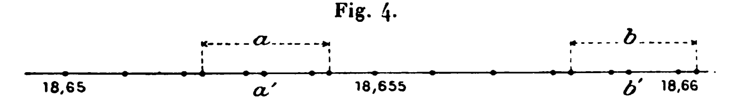
Si nous ignorons le sens de l'approximation, nous ne pouvons trouver un nombre qui ait sûrement cinq chiffres exacts : en effet, d'après ce qui précède, nous hésitons entre les nombres 18,653 et 18,654. Considérons alors le nombre 18,65.

Il est inférieur au nombre a' de 326 cent-millièmes

(*fig.* 4), donc de moins de 400 cent-millièmes ou 0,004; comme a' est approché à moins de 0,001, le nombre 18,65 diffère du nombre exact a de moins de 0,004 + 0,001 et, par suite, de moins de 10 millièmes ou 0,01 : il a donc quatre chiffres exacts.

Toutefois, si nous avions eu le nombre $b' = 18,65926$ approché à moins de 0,001 dans un sens inconnu, le résultat précédent aurait été inexact. En effet, le nombre 18,65 est inférieur à b' de 926 cent-millièmes, donc de moins de 1000 cent-millièmes ou 0,01 ; comme b' est approché à moins de 0,001, le nombre 18,65 diffère du nombre exact b de moins de 0,01 + 0,001 : on ne peut donc dire que 18,65 a quatre chiffres exacts.

Fig. 4.



Mais prenons le nombre 18,66 : il est supérieur au nombre b' de 74 cent-millièmes, donc de moins de 100 cent-millièmes ou 0,001 ; comme b' est approché à moins de 0,001, le nombre 18,66 diffère du nombre exact b de moins de 0,001 + 0,001 et, par suite, de moins de 0,01 : le nombre 18,66 a donc quatre chiffres exacts.

On raisonnerait de même dans tous les autres cas. Si, par exemple, le nombre 0,001576 est approché à moins de 0,00001 p. e., le nombre 0,00157 a trois chiffres exacts; si le nombre 7631 est approché à moins de 10 dans un sens inconnu, le nombre 7600 a deux chiffres exacts, etc.

9. D'après le théorème précédent, si l'erreur d'un nombre approché est inférieure à $\frac{1}{10^k}$, on pourra ob-

tenir k chiffres décimaux exacts si l'on connaît le sens de l'approximation, $k - 1$ dans le cas contraire.

10. Nous avons, dans ce qui précède, donné les relations entre le nombre de chiffres exacts et l'erreur absolue d'un nombre approché. Nous avons encore deux théorèmes à démontrer pour établir les relations entre le nombre de chiffres exacts et l'erreur relative.

Théorème III. — *Si un nombre approché a n chiffres exacts, son erreur relative est inférieure à $\frac{1}{z \times 10^{n-1}}$, z étant le premier chiffre significatif à gauche du nombre approché.*

Soit, par exemple, le nombre 35,43271. Supposons qu'il ait cinq chiffres exacts. C'est dire que le nombre 35,432 est affecté d'une erreur moindre que 0,001. Le nombre 30 est certainement approché p. d., et l'erreur relative est inférieure à $\frac{0,001}{30} = \frac{1}{3 \times 10^4}$.

De même, soit le nombre approché 0,00591378 qui a trois chiffres exacts. Alors le nombre 0,00591 est approché à moins de 0,00001. Le nombre 0,005 est certainement approché p. d., et l'erreur relative est inférieure à $\frac{0,00001}{0,005} = \frac{1}{5 \times 10^2}$.

Remarque. — Il résulte *a fortiori* du théorème qui précède que, si un nombre approché a n chiffres exacts, son erreur relative est inférieure à $\frac{1}{10^{n-1}}$, car $z \geqq 1$.

11. Théorème IV. — *Si l'erreur relative d'un nombre approché dont z est le premier chiffre significatif à gauche est inférieure à $\frac{1}{(z+1) 10^{n-1}}$, on peut*

obtenir, après suppression de chiffres, un nombre ayant n ou n — 1 chiffres exacts, suivant qu'on connaît ou non le sens de l'approximation.

Soit, par exemple, le nombre $a' = 51,85367$ dont l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{6 \times 10^3}$. Comme a' est inférieur à 60, son erreur absolue sera inférieure à $60 \times \frac{1}{6 \times 10^3} = 0,01$, c'est-à-dire inférieure à une unité de l'ordre du quatrième chiffre.

Appliquons alors le théorème II. Si a' est approché p. d., le nombre 51,86 a quatre chiffres exacts; si a' est approché p. e., le nombre 51,85 a quatre chiffres exacts. Si l'on ignore le sens de l'approximation, le nombre 51,8 a trois chiffres exacts : si toutefois le nombre avait été 51,89367, le nombre 51,9 aurait eu trois chiffres exacts.

Remarque. — Le théorème précédent s'applique en particulier si l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{10^n}$, car $z + 1 \leqq 10$.

CHAPITRE II.

Calculs approchés : problèmes du premier type.

---

12. Définition. — On dit qu'on fait un *calcul approché* lorsque, ayant à faire des opérations sur des nombres, on effectue ces mêmes opérations sur des valeurs approchées d'écriture plus simple de ces nombres : on obtient ainsi le résultat du calcul avec une certaine approximation. Toutes les questions de calcul approché rentrent dans deux types principaux, suivant qu'on se donne l'approximation des nombres sur lesquels on opère ou l'approximation du résultat d'un calcul à effectuer sur ces nombres.

PROBLÈMES DU PREMIER TYPE.

13. Leur énoncé général est le suivant :

Connaissant les approximations de certains nombres, trouver l'approximation du résultat d'un calcul à effectuer sur ces nombres.

Les approximations des nombres donnés peuvent être définies soit par les erreurs absolues de ces nombres, soit par leurs erreurs relatives, soit par leurs nombres de chiffres exacts. On peut d'autre part demander de

déterminer l'approximation du résultat du calcul soit par son erreur absolue, soit par son erreur relative, soit par son nombre de chiffres exacts.

Au total, neuf problèmes.

Il existe pour les résoudre trois méthodes, dans chacune desquelles les neuf problèmes se ramènent à un problème fondamental.

MÉTHODE DES ERREURS ABSOLUES.

14. Le problème fondamental est, dans ce cas, le suivant :

Connaissant les limites supérieures des erreurs absolues de certains nombres, trouver celle du résultat d'un calcul à effectuer sur ces nombres.

Pour justifier le nom de *problème fondamental* que nous donnons à ce problème, il faut montrer que les huit autres s'y ramènent.

En effet, supposons d'abord qu'on donne des limites supérieures des erreurs absolues des nombres sur lesquels on opère.

Si l'on demande une limite supérieure de l'erreur relative du résultat, on résoudra d'abord le problème fondamental, ce qui donnera une limite supérieure α_1 de son erreur absolue, puis on déterminera *a priori*, au moyen de valeurs grossièrement approchées des nombres sur lesquels on opère, une limite inférieure a_2 du résultat : le nombre $\frac{\alpha_1}{a_2}$ répondra à la question. Si l'on demande le nombre de chiffres exacts du résultat, on résoudra d'abord le problème fondamental, ce qui donnera une limite supérieure de son erreur absolue, d'où l'on déduira l'ordre, entier ou décimal, de l'unité

à laquelle elle est immédiatement inférieure; on cherchera ensuite *a priori* l'ordre du premier chiffre significatif à gauche du résultat, et l'on aura alors le nombre de ses chiffres exacts en appliquant le théorème II.

Supposons, en second lieu, qu'au lieu de donner des limites supérieures des erreurs absolues des nombres sur lesquels on opère on donne, soit des limites supérieures de leurs erreurs relatives, soit leurs nombres de chiffres exacts : il sera aisé d'en déduire des limites supérieures des erreurs absolues, et l'on sera ramené à l'un des problèmes qui précèdent.

Occupons-nous donc uniquement du problème fondamental.

15. Problème fondamental. — *Connaissant les limites supérieures des erreurs absolues de certains nombres, trouver une limite supérieure de l'erreur absolue du résultat d'un calcul à effectuer sur ces nombres.*

Pour résoudre ce problème, il faut d'abord établir des théorèmes généraux concernant chacune des opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine carrée ou cubique.

16. Addition et soustraction. — Théorème. — *L'erreur absolue d'une somme ou d'une différence de nombres approchés est moindre que la somme des erreurs absolues des différents nombres, prises par excès.*

Soient d'abord deux nombres a et b, de valeurs approchées a' et b',

$$a' = a \pm \alpha, \qquad b' = b \pm \beta,$$

les signes étant + ou — suivant que les erreurs sont p. e. ou p. d.

Quels que soient ces signes, la somme $a' + b'$ a pour valeur minimum $a + b - (\alpha + \beta)$ et pour valeur maximum $a + b + (\alpha + \beta)$: elle est donc comprise entre $a + b - (\alpha_1 + \beta_1)$ et $a + b + (\alpha_1 + \beta_1)$. Donc $a' + b'$ est une valeur approchée de la somme $a + b$, avec une erreur inférieure à $\alpha_1 + \beta_1$.

De même, quelle que soit la nature des erreurs, la différence $a' - b' (a > b)$ a pour valeur minimum $a - b - (\alpha + \beta)$ et pour valeur maximum $a - b + (\alpha + \beta)$: elle est donc comprise entre $a - b - (\alpha_1 + \beta_1)$ et $a - b + (\alpha_1 + \beta_1)$. Par suite $a' - b'$ est une valeur approchée de la différence $a - b$, avec une erreur inférieure à $\alpha_1 + \beta_1$.

Soient, plus généralement, a, b, c, d des nombres exacts. Considérons les valeurs approchées

$$a' = a \pm \alpha, \qquad b' = b \pm \beta, \qquad c' = c \pm \gamma, \qquad d' = d \pm \delta.$$

L'expression numérique $a' + b' - c' + d'$ a pour valeur minimum

$$a + b - c + d - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

et pour valeur maximum

$$a + b - c + d + (\alpha + \beta + \gamma + \delta);$$

elle est donc comprise entre

$$a + b - c + d - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1)$$

et

$$a + b - c + d + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1);$$

donc $a' + b' - c' + d'$ est une valeur approchée de

$$a + b - c + d$$

avec une erreur inférieure à

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1.$$

17. **Multiplication.** — **Théorème.** — *L'erreur absolue du produit de plusieurs facteurs approchés est moindre que la somme des produits obtenus en multipliant l'erreur de chaque facteur par tous les autres facteurs, les erreurs et les facteurs étant pris par excès.*

Soient d'abord deux facteurs a et b, de valeurs approchées a' et b'.

1° Si a' et b' sont approchés p. d., on a

$$a' = a - \alpha, \qquad b' = b - \beta,$$

$$\begin{aligned} a'b' &= (a - \alpha)(b - \beta) \\ &= ab - [b\alpha + (a - \alpha)\beta] = ab - (b\alpha + a'\beta). \end{aligned}$$

Donc $a'b'$ est une valeur approchée p. d. de ab; l'erreur est $b\alpha + a'\beta$.

2° Si a' est approché p. d. et b' p. e., on a

$$a' = a - \alpha, \qquad b' = b + \beta,$$

$$a'b' = (a - \alpha)(b + \beta).$$

Ce produit est égal, soit à

$$ab + [(a - \alpha)\beta - b\alpha] = ab + (a'\beta - b\alpha),$$

soit à

$$ab - [b\alpha - (a - \alpha)\beta] = ab - (b\alpha - a'\beta).$$

Dans le premier cas, $a'b'$ est une valeur approchée p. e. de ab; l'erreur est $a'\beta - b\alpha$. Dans le second cas, $a'b'$ est une valeur approchée p. d. de ab; l'erreur est $b\alpha - a'\beta$.

3° Si a' et b' sont approchés p. e., on a

$$a' = a + \alpha, \qquad b' = b + \beta,$$

$$\begin{aligned} a'b' &= (a + \alpha)(b + \beta) \\ &= ab + [b\alpha + (a + \alpha)\beta] = ab + (b\alpha + a'\beta). \end{aligned}$$

Donc $a'b'$ est une valeur approchée p. e. de ab; l'erreur est $b\alpha + a'\beta$.

Par suite, dans tous les cas, si a_1 et b_1 sont des limites supérieures de a et de b, l'erreur ε du produit $a'b'$ est inférieure à $b_1\alpha_1 + a_1\beta_1$.

Soit maintenant un produit de plusieurs facteurs.

Commençons par remarquer que, d'après ce qui précède, on a pour deux facteurs l'inégalité

$$\frac{\varepsilon}{a_1 b_1} < \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\beta_1}{b_1}.$$

Supposons alors que nous ayons établi pour les $k - 1$ facteurs $a, b, c, \ldots, l$, dont $a', b', c', \ldots, l'$ sont des valeurs approchées, l'inégalité

$$(1) \qquad \frac{\eta}{a_1 b_1 c_1 \ldots l_1} < \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\beta_1}{b_1} + \frac{\gamma_1}{c_1} + \ldots + \frac{\lambda_1}{l_1},$$

η désignant l'erreur du produit $a'b'c'\ldots l'$. Prenons un facteur de plus, m, dont m' est une valeur approchée. Si ε désigne l'erreur du produit $a'b'c'\ldots l'm'$, on a, d'après ce qu'on a vu pour deux facteurs,

$$\frac{\varepsilon}{a_1 b_1 c_1 \ldots l_1 \times m_1} < \frac{\eta_1}{a_1 b_1 c_1 \ldots l_1} + \frac{\mu_1}{m_1}.$$

Comme $\eta_1 > \eta$, nous pouvons prendre pour

$$\frac{\eta_1}{a_1 b_1 c_1 \ldots l_1}$$

le second membre de l'inégalité (1); nous avons alors

$$\frac{\varepsilon}{a_1 b_1 c_1 \ldots l_1 m_1} < \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\beta_1}{b_1} + \frac{\gamma_1}{c_1} + \ldots + \frac{\lambda_1}{l_1} + \frac{\mu_1}{m_1},$$

ou

$$\varepsilon < \alpha_1 \times b_1 c_1 \ldots m_1 + \beta_1 \times a_1 c_1 \ldots m_1 + \ldots + \mu_1 \times a_1 b_1 \ldots l_1,$$

ce qui démontre le théorème.

Cas particulier. — Si l'on suppose tous les facteurs égaux, on voit que l'erreur absolue de a'^k est inférieure à $k\alpha_1 a_1^{k-1}$.

18. Division. — **Théorème.** — *L'erreur absolue du quotient de deux nombres approchés est moindre qu'une fraction ayant pour dénominateur le carré du diviseur pris par défaut, et pour numérateur la somme des produits obtenus en multipliant l'erreur de chaque nombre par l'autre nombre, les erreurs et les nombres étant pris par excès.*

Soient a et b les deux nombres, de valeurs approchées a' et b'.

1° Si a' est approché p. d. et b' p. e., on a

$$a' = a - \alpha, \qquad b' = b + \beta,$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} - \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{b\alpha + a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{b\alpha + a\beta}{bb'}.$$

Donc $\frac{a'}{b'}$ est une valeur approchée p. d. de $\frac{a}{b}$; l'erreur est $\frac{b\alpha + a\beta}{bb'}$.

2° Si a' est approché p. e. et b' p. d., on a

$$a' = a + \alpha, \qquad b' = b - \beta,$$

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b-\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha + a\beta}{b(b-\beta)} = \frac{b\alpha + a\beta}{bb'}.$$

Donc $\frac{a'}{b'}$ est une valeur approchée p. e. de $\frac{a}{b}$; l'erreur est $\frac{b\alpha + a\beta}{bb'}$.

3° Si a' et b' sont approchés p. e., on a

$$a' = a + \alpha, \qquad b' = b + \beta.$$

On a donc, soit

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} - \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a\beta - b\alpha}{b(b+\beta)} = \frac{a\beta - b\alpha}{bb'},$$

soit

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{b\alpha - a\beta}{bb'}.$$

Dans le premier cas, $\frac{a'}{b'}$ est une valeur approchée p. d. de $\frac{a}{b}$; l'erreur est $\frac{a\beta - b\alpha}{bb'}$. Dans le second cas, $\frac{a'}{b'}$ est une valeur approchée p. e. de $\frac{a}{b}$; l'erreur est $\frac{b\alpha - a\beta}{bb'}$.

4° Si a' et b' sont approchés p. d., on a

$$a' = a - \alpha, \qquad b' = b - \beta.$$

On a alors, soit

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} - \frac{a-\alpha}{b-\beta} = \frac{b\alpha - a\beta}{b(b-\beta)} = \frac{b\alpha - a\beta}{bb'},$$

soit

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a-\alpha}{b-\beta} - \frac{a}{b} = \frac{a\beta - b\alpha}{b(b-\beta)} = \frac{a\beta - b\alpha}{bb'}.$$

Dans le premier cas, $\frac{a'}{b'}$ est une valeur approchée p. d. de $\frac{a}{b}$; l'erreur est $\frac{b\alpha - a\beta}{bb'}$. Dans le second

cas, $\frac{a'}{b'}$ est une valeur approchée p. e. de $\frac{a}{b}$; l'erreur est $\frac{a\beta - b\alpha}{bb'}$.

Par suite, dans tous les cas, a_1 désignant une limite supérieure de a, et b_1 et b_2 des limites supérieure et inférieure de b, l'erreur du quotient $\frac{a'}{b'}$ est moindre que $\frac{b_1\alpha_1 + a_1\beta_1}{b_2^2}$.

19. Racine carrée. — Théorème. — *L'erreur absolue de la racine carrée d'un nombre approché est moindre qu'une fraction ayant pour dénominateur le double de la racine carrée du nombre pris par défaut, et pour numérateur l'erreur du nombre prise par excès.*

Soit a le nombre exact de valeur approchée a'.

1° Si a' est approché p. d., on a

$$a' = a - \alpha,$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a'} = \sqrt{a} - \sqrt{a - \alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{a} + \sqrt{a - \alpha}} = \frac{\alpha}{\sqrt{a} + \sqrt{a'}}.$$

Le nombre $\sqrt{a'}$ est donc une valeur approchée p. d. de $\sqrt{a}$; l'erreur est $\frac{\alpha}{\sqrt{a} + \sqrt{a'}}$.

2° Si a' est approché p. e., on a

$$a' = a + \alpha,$$

$$\sqrt{a'} - \sqrt{a} = \sqrt{a + \alpha} - \sqrt{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{a} + \sqrt{a + \alpha}} = \frac{\alpha}{\sqrt{a} + \sqrt{a'}}.$$

Le nombre $\sqrt{a'}$ est donc une valeur approchée p. e. de $\sqrt{a}$; l'erreur est $\frac{\alpha}{\sqrt{a} + \sqrt{a'}}$.

Donc, dans tous les cas, a_2 désignant une limite inférieure de a, l'erreur est inférieure à $\frac{\alpha_1}{2\sqrt{a_2}}$.

20. Racine cubique. — Théorème. — *L'erreur absolue de la racine cubique d'un nombre approché est moindre qu'une fraction ayant pour dénominateur le triple de la racine cubique du carré du nombre pris par défaut, et pour numérateur l'erreur du nombre prise par excès.*

Gardons les mêmes notations que dans la racine carrée.

1° Si a' est approché p. d., on a

$$a' = a - \alpha,$$

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a'} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a-\alpha}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a(a-\alpha)} + \sqrt[3]{(a-\alpha)^2}}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{aa'} + \sqrt[3]{a'^2}}.$$

2° Si a' est approché p. e., on a

$$a' = a + \alpha,$$

$$\sqrt[3]{a'} - \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a+\alpha} - \sqrt[3]{a}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt[3]{(a+\alpha)^2} + \sqrt[3]{(a+\alpha)a} + \sqrt[3]{a^2}}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt[3]{a'^2} + \sqrt[3]{a'a} + \sqrt[3]{a^2}}.$$

Donc, dans les deux cas, l'erreur est inférieure à $\frac{\alpha_1}{3\sqrt[3]{a_2^2}}$.

Remarque. — Les deux théorèmes précédents sont susceptibles de généralisation : on démontre sans peine

que l'erreur absolue de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre approché est inférieure à $\frac{\alpha_1}{m\sqrt[m]{a_2^{m-1}}}$.

21. Résumons dans un Tableau les principales formules d'erreur absolue auxquelles nous sommes arrivés.

Opérations sur les nombres $a, b, c, \ldots, m$.	Lim. sup. de l'erreur absolue des nombres donnés.	Lim. sup. de l'erreur absolue du résultat du calcul.
Addition ou soustraction...	$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \mu_1$	$\Sigma\alpha_1$
Multiplication	"	$\Sigma\alpha_1 b_1 c_1 \ldots m_1$
Puissance k...............	α_1	$k\alpha_1 a_1^{k-1}$
Division $\left(\frac{a}{b}\right)$...........	α_1, β_1	$\frac{b_1\alpha_1 + a_1\beta_1}{b_2^2}$
Racine carrée............	α_1	$\frac{\alpha_1}{2\sqrt{a_2}}$
Racine cubique...........	"	$\frac{\alpha_1}{3\sqrt[3]{a_2^2}}$

Dans ce Tableau, nous avons employé la notation bien connue $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1 b_1 c_1 \ldots m_1$ pour désigner la somme de tous les nombres tels que α_1 ou $\alpha_1 b_1 c_1 \ldots m_1$.

Remarque. — Les erreurs d'un produit et d'un quotient, ainsi que leurs limites, se simplifient lorsque quelques-uns des nombres sont connus exactement. On démontrera sans aucune difficulté que l'erreur du produit ab' est égale à $a\beta < a\beta_1$, a étant un nombre entier ou fractionnaire connu exactement, et que l'erreur du quotient $\frac{a}{b'}$ est égale à $\frac{a\beta}{bb'} < \frac{a\beta_1}{b_2^2} < \frac{a_1\beta_1}{b_2^2}$.

Montrons maintenant comment ces théorèmes s'appliquent aux problèmes du premier type.

22. Définitions. — Nous dirons qu'un calcul approché est *simple* lorsqu'il ne comporte qu'une seule opération. Il est dit *complexe* dans le cas contraire.

Nous considérerons toutefois comme des expressions numériques simples la somme ou le produit de plusieurs nombres approchés.

23. Calculs simples. — Les calculs simples du premier type sont des applications directes des théorèmes précédents et de la méthode exposée au n° **14**. On devra surtout chercher à obtenir rapidement la réponse à la question posée; dans ce but, on ne devra pas craindre d'arrondir les nombres tels que α_1, a_1 ou a_2.

En voici quelques exemples :

1° *Les nombres* $a' = 21,245$, $b' = 15,52$, $c' = 12,48$ *sont approchés chacun à moins d'une demi-unité de l'ordre de leur dernier chiffre à droite. Trouver une limite supérieure de l'erreur absolue de l'expression* $a' + b' - c'$, *ainsi qu'une limite supérieure de son erreur relative et son nombre de chiffres exacts.*

Nous pouvons prendre

$$\alpha_1 = 0,0005, \qquad \beta_1 = 0,005, \qquad \gamma_1 = 0,005;$$

donc une limite supérieure de l'erreur absolue cherchée est

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0,0105.$$

En second lieu, une limite inférieure du résultat est évidemment

$$21 + 15 - 13 = 23 \quad ([1]).$$

([1]) Pour obtenir une différence p. e., on prend le premier nombre p. e. et le second p. d.

Pour obtenir une différence p. d., on prend le premier nombre p. d. et le second p. e.

Donc une limite supérieure de l'erreur relative du résultat du calcul est $\frac{0,0105}{23}$; une limite encore plus simple est

$$\frac{0,0105}{20} = 0,000525.$$

Enfin, on a

$$0,0105 < 0,1.$$

Comme $a' + b' - c'$ a deux chiffres à la partie entière et qu'on ignore le sens de l'approximation, on pourra, d'après le théorème II, obtenir au résultat deux chiffres exacts.

Remarque. — Il est clair que le nombre des chiffres exacts peut être supérieur à 2 : ce qu'on peut affirmer, c'est qu'on peut obtenir *au moins* deux chiffres exacts.

2° *Les nombres* 6,518 *et* 2,5871 *ont chacun trois chiffres exacts. Sur combien de chiffres exacts peut-on compter dans le produit?*

Par définition du nombre de chiffres exacts, on a

$$a' = 6,51 \quad \text{et} \quad b' = 2,58 \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0,01.$$

Prenons par exemple $a_1 = 7$ et $b_1 = 3$; une limite supérieure de l'erreur du produit $a'b'$ sera

$$b_1\alpha_1 + a_1\beta_1 = (3+7)\,0,01 = 0,1.$$

Ceci posé, remarquons que le premier chiffre significatif à gauche du produit $a'b'$ est de l'ordre des dizaines : il pourra donc s'obtenir sûrement avec deux chiffres exacts.

3° *Déterminer une limite supérieure de l'erreur absolue du quotient* $\frac{a'}{b'}$, *dans lequel* $a' = 12,86347$ *est affecté d'une erreur absolue inférieure à* 0,00004 *et où le nombre* $b' = 0,00025$ *est connu avec une erreur relative inférieure à* $\frac{1}{400}$.

Le quotient est le même que celui de $c' = 1286347$ par $d' = 25$.

Cherchons d'abord une limite de l'erreur absolue du

nombre d'. Cette erreur est inférieure à $d_1 \delta'_1$; on peut prendre $d_1 = 40$ et $\delta'_1 = \frac{1}{400}$: on a ainsi le nombre

$$\delta_1 = 0,1.$$

Prenons d'autre part $c_1 = 1300000$, $d_2 = 20$, $\gamma_1 = 4$. Nous aurons pour limite supérieure de l'erreur du quotient $\frac{a'}{b'}$ ou $\frac{c'}{d'}$ le nombre

$$\frac{d_1 \gamma_1 + c_1 \delta_1}{d_2^2} = \frac{160 + 130000}{400} = \frac{13016}{40} = 325,4.$$

4° *Le nombre approché par défaut* 425,63071 *a six chiffres exacts. Trouver une limite supérieure de l'erreur absolue avec laquelle on peut obtenir sa racine carrée ou cubique.*

Par hypothèse, le nombre $a' = 425,630$ est approché p. d. avec une erreur inférieure à $\alpha_1 = 0,001$. Si donc on prend $a_2 = 400$, l'erreur absolue de $\sqrt{a'}$ aura pour limite

$$\frac{\alpha_1}{2\sqrt{a_2}} = \frac{0,001}{40} = 0,000025$$

et celle de $\sqrt[3]{a'}$ aura pour limite

$$\frac{\alpha_1}{3\sqrt[3]{a_2^2}} = \frac{0,001}{3\sqrt[3]{160000}} < \frac{0,001}{3 \times 50} < 0,000007.$$

24. Calculs complexes. — Indiquons d'abord, sur un exemple, la résolution du problème fondamental dans le cas d'un calcul complexe du premier type.

Soit l'expression numérique $n' = \sqrt{\frac{a'b'}{c'}}$. Supposons qu'on connaisse des valeurs approchées p. d. ou p. e. des nombres a, b, c, ainsi que des limites supérieures des erreurs des nombres a', b', c', et qu'on demande une limite supérieure de l'erreur de n'.

Prenons les diverses opérations dans l'ordre où on devrait les effectuer pour calculer n'.

Considérons d'abord le produit $d' = a'b'$: une limite supérieure de l'erreur de ce produit est $\delta_1 = b_1 \alpha_1 + a_1 \beta_1$. Nous avons alors

$$n' = \sqrt{\frac{d'}{c'}}.$$

Considérons le quotient $e' = \frac{c'}{d'}$: une limite supérieure de l'erreur de ce quotient est $\varepsilon_1 = \frac{d_1\gamma_1 + c_1\delta_1}{c_2^2}$. Nous avons alors

$$n' = \sqrt{e'} :$$

une limite supérieure de l'erreur de cette racine est $\frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{e_2}}$. La question est résolue : l'expression précédente est une limite supérieure de l'erreur de n'.

On raisonnerait de même dans tous les autres cas.

Comme dans les calculs simples, il importe d'obtenir rapidement la réponse, et l'on ne doit pas hésiter à arrondir les nombres α_1, a_1, a_2, ... Il faudra aussi procéder avec ordre : dans ce but, nous placerons les principaux nombres de la question dans un Tableau complètement analogue au dispositif employé par M. Guyou (1) pour les calculs complexes du deuxième type, et dont voici le mode de formation :

1° *On commence par remplacer par des lettres les nombres donnés, un même nombre devant être représenté par autant de lettres distinctes qu'il entre de fois dans l'expression considérée ;*

2° *On prépare un Tableau en trois colonnes, ayant respectivement pour titres : nombres, valeurs approchées, limites supérieures des approximations ;*

---

(1) Guyou, *Note sur les approximations numériques*, Paris, Gauthier-Villars.

3° *Dans la première colonne, on écrit les nombres donnés et les opérations à effectuer successivement, en désignant par de nouvelles lettres les résultats qu'on trouverait en les effectuant;*

4° *Dans la deuxième colonne, qu'on divise en deux, on inscrit des valeurs grossièrement approchées par excès et par défaut des nombres de la première colonne (quelques-unes de ces valeurs peuvent ne pas servir);*

5° *Dans la troisième colonne, on inscrit successivement les approximations données et celles auxquelles on est conduit par le raisonnement, qu'on mettra en abrégé au-dessous du Tableau.*

Donnons quelques exemples de calcul complexe :

1° *Le rayon d'un cercle a pour valeur approchée* 6,48932 *à moins de* 0,0001 *près. On prend pour* π *le nombre* 3,14159. *Trouver une limite supérieure de l'erreur absolue avec laquelle on peut obtenir sa surface.*

Posons

$$a' = 6,4893, \qquad \alpha_1 = 0,0001,$$
$$b' = 3,14159, \qquad \beta_1 = 0,00001.$$

La surface approchée est $S' = b'a'^2$.

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	p. d.	Lim. sup. des approximations.
$b' = 3,14159$	4	3	0,00001
$a' = 6,4891$	7	6	0,0001
$c' = a'^2$	49	36	0,0014
$S' = b'c'$	4×49	3×36	0,00609

Erreur de c' :

$$\gamma_1 = 2a_1\alpha_1 = 2 \times 7 \times 0,0001 = 0,0014.$$

Erreur de S' :

$$\sigma_1 = c_1\beta_1 + b_1\gamma_1$$
$$= 49 \times 0{,}00001 + 4 \times 0{,}0014 = 0{,}00049 + 0{,}0056 = 0{,}00609.$$

2° *Pour calculer l'expression* $n = \dfrac{\sqrt{2}+\pi}{\sqrt{3}+\pi}$ *par défaut, on prend au numérateur* 1,4 *et* 3,1 *pour valeurs de* $\sqrt{2}$ *et de* π, *et au dénominateur* 1,8 *et* 3,2 *pour valeurs de* $\sqrt{3}$ *et de* π. *Trouver une limite supérieure de l'erreur commise.*

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	Valeurs approchées p. d.	Lim. sup. des approximations.
$a' = 1{,}4$	2	1	0,02
$b' = 3{,}1$	4	3	0,05
$e' = a' + b'$	6	4	0,07
$c' = 1{,}8$	2	1	0,07
$d' = 3{,}2$	4	3	0,06
$f' = c' + d'$	6	4	0,13
$n' = \dfrac{e'}{f'}$ [1]	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	0,075

Erreur de e' :

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}07.$$

Erreur de f' :

$$\varphi_1 = \gamma_1 + \delta_1 = 0{,}07 + 0{,}06 = 0{,}13.$$

Erreur de n' :

$$\nu_1 = \frac{f_1\varepsilon_1 + e_1\varphi_1}{f_2^2} = \frac{6 \times 0{,}07 + 6 \times 0{,}13}{16} = \frac{1{,}2}{16} = 0{,}075.$$

Remarque. — On a trouvé les erreurs des nombres a', b',

---

(1) Pour obtenir un quotient p. e., on prend le dividende p. e. et le diviseur p. d. Pour obtenir un quotient p. d., on prend le dividende p. d. et le diviseur p. e.

c', d' en se rappelant qu'on a

$$\pi = 3,1415\ldots, \qquad \sqrt{2} = 1,414\ldots, \qquad \sqrt{3} = 1,732\ldots.$$

3° *Le volume d'une sphère est exactement* 10,25. *On prend pour* π *une valeur approchée telle que son erreur relative soit inférieure à* 0,000003. *Avec combien de chiffres exacts pourra-t-on obtenir son rayon?*

Cherchons d'abord la valeur approchée de π et son erreur absolue. Le nombre π étant inférieur à 4, l'erreur absolue de la valeur cherchée sera inférieure à

$$4 \times 0,000003 = 0,000012.$$

On peut alors prendre soit 3,14159, soit 3,1416 : cette dernière valeur est préférable parce qu'elle contient un chiffre de moins. Posons

$$a = 10,25, \qquad \alpha = 0,$$
$$b' = 3,1416, \qquad \beta_1 = 0,000012,$$

et commençons par résoudre le problème fondamental sur l'expression numérique $r' = \sqrt[3]{\frac{3a}{4b'}} = \sqrt[3]{\frac{0,75a}{b'}}$.

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	Valeurs approchées p. d.	Lim. sup. des approximations.
$a = 10,25$	11	10	0
$c = 0,75a$	9	7	0
$b' = 3,1416$	4	3	0,000012
$d' = \frac{c}{b'}$	3	1	0,000012
$r' = \sqrt[3]{d'}$	2	1	0,000004

Erreur de d' :

$$\delta_1 < \frac{c_1 \beta_1}{b_2^2} = \frac{9 \times 0.000012}{9} = 0,000012,$$

Erreur de r' :

$$\rho_1 = \frac{\delta_1}{3\sqrt[3]{d_2^2}} = \frac{0{,}000012}{3} = 0{,}000004.$$

Revenons maintenant à la question posée. L'erreur de r' est inférieure à 0,00001 et, d'après le Tableau qui précède, r' n'a qu'un chiffre à la partie entière : donc l'erreur de r' est inférieure à une unité de l'ordre de son sixième chiffre. Comme on connaît le sens de l'approximation, on aura, d'après le théorème II, six chiffres exacts.

MÉTHODE DES ERREURS RELATIVES.

25. Nous supposerons, dans cette méthode, que l'on n'ait à considérer que des expressions numériques ne comprenant ni addition ni soustraction de nombres approchés : nous appellerons ces expressions des *expressions numériques monomes*. La raison en est qu'étant données les erreurs relatives de certains nombres approchés, il n'existe pas de règle simple donnant l'erreur relative d'une opération d'addition ou de soustraction effectuée sur ces nombres. Cette méthode ne résolvant pas tous les problèmes du premier type doit donc être regardée dès maintenant comme inférieure à la précédente.

On verrait par un raisonnement complètement analogue à celui du n° **14** que toutes les questions du premier type peuvent se ramener au problème fondamental ci-dessous :

26. Problème fondamental. — *Connaissant les limites supérieures des erreurs relatives de certains nombres, trouver une limite supérieure de l'erreur relative du résultat d'un calcul monome à effectuer sur ces nombres.*

Établissons d'abord les théorèmes généraux donnant

l'erreur relative d'un produit, d'un quotient, d'une racine carrée ou cubique.

27. Multiplication. — Théorème. — *L'erreur relative du produit de plusieurs facteurs approchés est moindre que la somme des erreurs relatives des facteurs, prises par excès.*

Soient d'abord deux facteurs a et b, de valeurs approchées a' et b'. Reportons-nous au nº 17.

1° Si a' et b' sont approchés p. d., l'erreur absolue de $a'b'$ est $b\alpha + a'\beta$. Son erreur relative est donc

$$\frac{b\alpha + a'\beta}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} \times \frac{a'}{a} < \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b},$$

puisque $\frac{a'}{a} < 1$. Elle est donc inférieure à $\frac{\alpha_1}{a_2} + \frac{\beta_1}{b_2}$.

2° Si a' est approché p. d. et b' p. e., l'erreur absolue de $a'b'$ est inférieure à $b\alpha + a'\beta$. Son erreur relative est donc, ici encore, inférieure à $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$, quantité plus petite elle-même que $\frac{\alpha_1}{a_2} + \frac{\beta_1}{b_2}$.

3° Si a' et b' sont approchés p. e., l'erreur absolue de $a'b'$ est $b\alpha + a'\beta$, et son erreur relative est

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} \times \frac{a'}{a}.$$

Cette erreur n'est pas inférieure à $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$, puisque $\frac{a'}{a} > 1$. Mais $\frac{a'}{a}$ est, en général, assez voisin de 1; remplaçons-le donc par 1 et, par compensation, forçons les numérateurs et réduisons les dénominateurs : nous pourrons encore dire, avec une exactitude suffisante dans la pratique, que l'erreur relative de $a'b'$ est inférieure à $\frac{\alpha_1}{a_2} + \frac{\beta_1}{b_2}$.

Si donc, conformément aux notations adoptées pour les erreurs relatives, nous désignons par ε' l'erreur relative de $a'b'$ et par α'_1 et β'_1 des limites supérieures des erreurs relatives des nombres a' et b', nous avons toujours

$$\varepsilon' < \alpha'_1 + \beta'_1.$$

Soit maintenant un produit de plusieurs facteurs. Supposons que nous ayons démontré pour les $k-1$ facteurs a', b', c', ..., l' l'inégalité

$$(1) \qquad \eta' < \alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1 + \ldots + \lambda'_1,$$

η' désignant l'erreur relative du produit $a'b'c'\ldots l'$. Si nous prenons un facteur de plus, m', et si ε' désigne l'erreur relative du produit $a'b'c'\ldots l'm'$, nous aurons, pour le produit de deux facteurs $a'b'c'\ldots l' \times m'$,

$$\varepsilon' < \eta'_1 + \mu'_1.$$

Prenons pour η'_1 le second membre de l'inégalité (1); nous avons alors

$$\varepsilon' < \alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1 + \ldots + \lambda'_1 + \mu'_1,$$

ce qui démontre complètement le théorème.

Cas particulier. — Si l'on suppose tous les facteurs égaux, on voit que l'erreur relative de a'^k est inférieure à $k\alpha'_1$.

28. Division. — **Théorème.** — *L'erreur relative du quotient de deux nombres approchés est moindre que la somme des erreurs relatives des deux nombres, prises par excès.*

Reportons-nous au n° 18.

1° Si a' est approché p. d. et b' p. e., l'erreur absolue

du quotient $\frac{a'}{b'}$ est $\frac{b\alpha + a\beta}{bb'}$; son erreur relative est donc

$$\frac{b\alpha + a\beta}{bb'} : \frac{a}{b} = \frac{b\alpha + a\beta}{ab'} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{a} \times \frac{b}{b'} + \frac{\beta}{b'},$$

quantité inférieure à $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$ et, par suite, à $\frac{\alpha_1}{a_2} + \frac{\beta_1}{b_2}$.

2° Si a' est approché p. e. et b' p. d., l'erreur relative est encore $\frac{\alpha}{a} \times \frac{b}{b'} + \frac{\beta}{b'}$. Comme actuellement on a

$$b' < b,$$

cette erreur n'est pas inférieure à $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$. Mais, pour la même raison que dans le troisième cas de la multiplication, on peut dire, avec une exactitude suffisante dans la pratique, que l'erreur relative est inférieure à

$$\frac{\alpha_1}{a_2} + \frac{\beta_1}{b_2}.$$

3° Si a' et b' sont approchés p. e., l'erreur relative sera inférieure à $\frac{\alpha}{a} \times \frac{b}{b'} + \frac{\beta}{b'}$, par suite à $\frac{\alpha_1}{a_2} + \frac{\beta_1}{b_2}$.

4° Si a' et b' sont approchés p. d., on pourra encore dire, comme dans le second des cas précédents, que l'erreur relative est inférieure à $\frac{\alpha_1}{a_2} + \frac{\beta_1}{b_2}$.

Finalement nous aurons, dans tous les cas, en désignant par ε' l'erreur relative du quotient considéré,

$$\varepsilon' < \alpha'_1 + \beta'_1.$$

29. Racine carrée. — Théorème. — *L'erreur relative de la racine carrée d'un nombre approché est moindre que la moitié de l'erreur relative du nombre, prise par excès.*

On verra aisément, en se reportant à l'erreur absolue

de $\sqrt{a'}$, que son erreur relative est

$$\frac{\alpha}{a+\sqrt{aa'}} < \frac{\alpha_1}{2a_1}.$$

On a donc, pour $\sqrt{a'}$,

$$\varepsilon' < \frac{\alpha'_1}{2}.$$

30. **Racine cubique.** — **Théorème.** — *L'erreur relative de la racine cubique d'un nombre approché est moindre que le tiers de l'erreur relative du nombre, prise par excès.*

L'erreur relative de $\sqrt[3]{a'}$ sera

$$\frac{\alpha}{a+\sqrt[3]{a^2a'}+\sqrt[3]{aa'^2}}.$$

On a donc, pour $\sqrt[3]{a'}$,

$$\varepsilon' < \frac{\alpha'_1}{3}.$$

Remarque. — Plus généralement, l'erreur relative de $\sqrt[m]{a'}$ est inférieure à $\frac{\alpha'_1}{m}$.

31. Formons, comme pour les erreurs absolues, un Tableau contenant les principales formules d'erreur relative que nous venons d'obtenir :

Opérations sur les nombres $a, b, c, \ldots, m$.	Lim. sup. de l'erreur relative des nombres donnés.	Lim. sup. de l'erreur relative du résultat du calcul.
Multiplication.......	$\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \mu'_1$	$\Sigma\alpha'_1$
Puissance k.........	α'_1	$k\alpha'_1$
Division............	α'_1, β'_1	$\Sigma\alpha'_1$
Racine carrée.......	α'_1	$\frac{\alpha'_1}{2}$
Racine cubique.....	"	$\frac{\alpha'_1}{3}$

Remarque. — Si quelques-uns des nombres sont connus exactement, leurs erreurs absolues sont nulles, donc aussi leurs erreurs relatives, et les formules précédentes se simplifient.

32. Calculs simples. — Ce sont des applications immédiates des théorèmes qui précèdent. En voici deux exemples :

1° *Pour effectuer le produit* $\pi\sqrt{3}$, *on prend* 3,1416 *pour* π *et* 1,733 *pour* $\sqrt{3}$. *Trouver une limite supérieure de l'erreur relative de la valeur approchée du produit ainsi obtenue.*

Les erreurs absolues des deux facteurs étant respectivement inférieures à 0,0001 et 0,001, leurs erreurs relatives sont inférieures à $\frac{0,0001}{3}$ et $\frac{0,001}{1}$, 3 et 1 étant des valeurs approchées p. d. des deux facteurs. L'erreur relative du produit sera inférieure à la somme $\frac{0,0031}{3}$ de ces deux erreurs, et, par suite, à 0,0011.

2° *Le nombre approché par défaut* 425,63071 *a six chiffres exacts. Trouver une limite supérieure de l'erreur absolue avec laquelle on peut obtenir sa racine carrée ou cubique.*

Ce problème a déjà été résolu (n° **23**, 4°) par la méthode des erreurs absolues. Traitons-le par la méthode des erreurs relatives.

Dire que le nombre 425,63071 a six chiffres exacts, c'est dire (théorème III) que son erreur relative est inférieure à $\frac{1}{4\times 10^5}$. L'erreur relative de sa racine carrée est donc inférieure à $\frac{1}{8\times 10^5}$: cette racine étant inférieure à 21 dont le carré est 441, son erreur est inférieure à $\frac{21}{8\times 10^5}$ ou 0,00002625.

De même, l'erreur relative de la racine cubique du nombre donné est inférieure à $\frac{1}{12 \times 10^5}$: cette racine étant inférieure à 8 dont le cube est 512, son erreur absolue est inférieure à $\frac{8}{12 \times 10^3}$ et, par conséquent, à 0,000007.

33. Calculs complexes. — Les calculs précédents ne comportaient qu'une opération. Envisageons maintenant une expression numérique monome quelconque, par exemple de la forme

$$\frac{a'^k \sqrt[m]{b'}}{c'^h \sqrt[n]{d'}},$$

où a', b', c', d' sont des nombres approchés, k et h des entiers au moins égaux à 1, m et n des entiers au moins égaux à 2. Cette expression étant un quotient, son erreur relative est moindre que la somme des erreurs relatives, prises par excès, du dividende et du diviseur. Or celles-ci ont respectivement pour limites supérieures

$$k\alpha'_1 + \frac{\beta'_1}{m} \quad \text{et} \quad h\gamma'_1 + \frac{\delta'_1}{n};$$

donc l'erreur relative de l'expression considérée est inférieure à

$$k\alpha'_1 + \frac{\beta'_1}{m} + h\gamma'_1 + \frac{\delta'_1}{n}.$$

Autrement dit :

L'erreur relative d'une expression numérique monome est moindre que la somme des erreurs relatives, prises par excès, des nombres qui y figurent, multipliées par l'exposant de la puissance à laquelle ils sont élevés ou divisées par l'indice du radical sous lequel ils se trouvent.

En voici un exemple :

Dans le calcul du nombre $\frac{\pi^3 \sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}}$ *on prend* 3,14 *pour valeur approchée de* π, $\sqrt{2}$ *avec une erreur relative plus petite que* 0,001 *et* $\sqrt[3]{5}$ *avec quatre chiffres exacts. Trouver une limite supérieure de l'erreur relative de l'expression.*

L'erreur absolue de 3,14 est inférieure à 0,01 : son erreur relative est donc inférieure à $\frac{0,01}{3}$ et, par conséquent, à 0,004. L'erreur relative de la valeur approchée de $\sqrt[3]{5}$ est inférieure à 0,001. Par suite, l'erreur cherchée est inférieure à

$$3 \times 0,004 + \frac{0,001}{2} + \frac{0,001}{3}$$

ou environ 0,013.

MÉTHODE DES CHIFFRES EXACTS.

34. Comme dans la précédente méthode, nous supposerons qu'il s'agit d'une expression numérique monome. En faisant un raisonnement analogue à celui du nº **14**, on voit sans peine que les divers problèmes se ramènent au suivant :

35. Problème fondamental. — *Connaissant les nombres de chiffres exacts de certains nombres, trouver le nombre minimum de chiffres exacts avec lequel on peut obtenir le résultat d'un calcul monome à effectuer sur ces nombres.*

Donnons d'abord deux théorèmes généraux.

36. Multiplication ou division. — Théorème. — *Si deux nombres approchés ont respectivement* n *et* n' *chiffres exacts* ($n \leqq n'$), *leur produit ou leur quo-*

tient peut s'obtenir avec $n-1$, $n-2$ ou $n-3$ chiffres exacts.

Tout d'abord, les erreurs relatives des deux nombres étant respectivement inférieures à

$$\frac{1}{z\times 10^{n-1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z'\times 10^{n'-1}},$$

z et z' étant leurs premiers chiffres significatifs à gauche, l'erreur relative de leur produit ou de leur quotient a pour limite supérieure $\frac{1}{z\times 10^{n-1}}+\frac{1}{z'\times 10^{n'-1}}$.

Si n et n' sont différents, on peut toujours supposer $n<n'$, et la somme précédente est égale à

$$\frac{1}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z'\times 10^{n'-n}}\right).$$

Si alors on a $z>1$, la parenthèse est au maximum égale à

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}<1,$$

et l'erreur relative du produit ou du quotient est inférieure à $\frac{1}{10^{n-1}}$. Il s'ensuit (théorème IV) que le nombre obtenu en prenant les $n-1$ ou $n-2$ premiers chiffres du quotient et forçant au besoin d'une unité le dernier chiffre pris, a tous ses chiffres exacts. Mais, si $z=1$, la parenthèse est supérieure à 1 et inférieure à 10, et l'erreur relative du produit ou du quotient est inférieure à $\frac{1}{10^{n-2}}$. Il s'ensuit qu'on pourra obtenir au produit ou au quotient $n-2$ ou $n-3$ chiffres exacts.

Si $n=n'$, l'erreur relative considérée est inférieure à

$$\frac{1}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}\right).$$

Si alors z et z' sont supérieurs à 1, on retombe sur le premier cas examiné plus haut; si l'un au moins des chiffres z ou z' est égal à 1, on retombe sur le second.

37. **Racine carrée (ou cubique). — Théorème.** — *Si un nombre approché a n chiffres exacts, sa racine carrée (ou cubique) peut s'obtenir avec n, n — 1 ou n — 2 chiffres exacts.*

L'erreur relative du nombre approché étant inférieure à $\frac{1}{z \times 10^{n-1}}$, celle de sa racine carrée est inférieure à $\frac{1}{2z \times 10^{n-1}}$. Soit z' le premier chiffre significatif à gauche de la racine carrée. Si l'on a

$$2z \geqq z' + 1,$$

son erreur relative est inférieure à $\frac{1}{(z'+1)10^{n-1}}$, d'où n ou $n - 1$ chiffres exacts. Mais, si $2z < z' + 1$, on peut seulement affirmer que l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{(z'+1)10^{n-2}}$ et obtenir $n - 1$ ou $n - 2$ chiffres exacts.

On raisonne de même pour la racine cubique, dont l'erreur relative a pour limite supérieure $\frac{1}{3z \times 10^{n-1}}$. Si $3z \geqq z' + 1$, z' étant son premier chiffre significatif à gauche, on peut obtenir n ou $n - 1$ chiffres exacts. Sinon, on ne peut en obtenir que $n - 1$ ou $n - 2$.

38. **Calculs simples.** — Ce sont des applications des théorèmes précédents. Exemples :

1° *Les nombres* 6,518 *et* 2,5871 *ont chacun trois chiffres exacts. Sur combien de chiffres exacts peut-on compter dans le produit?*

Nous avons ici $n = n' = 3$; d'ailleurs z et z' sont supérieurs

à 1 : on peut donc l'obtenir sûrement avec un chiffre exact. La méthode des erreurs absolues (n° 23, 2°) nous a montré qu'on pouvait l'obtenir au moins avec deux chiffres exacts.

2° *Le nombre approché par défaut* 425,63071 *a six chiffres exacts. Trouver une limite supérieure de l'erreur absolue avec laquelle on peut obtenir sa racine carrée ou cubique.*

Ce problème a déjà été résolu par la méthode des erreurs absolues (n° 23, 4°) et par celle des erreurs relatives (n° 32, 2°). Voyons ce que donne la méthode actuelle, d'abord pour la racine carrée.

On a $z = 4$, $z' = 2$, donc $2z \geqq z' + 1$, et l'on peut compter sur six chiffres exacts à la racine. Comme elle a deux chiffres à la partie entière, son erreur absolue est inférieure à 0,0001.

Quant à la racine cubique pour laquelle $z' = 7$, et, par suite, $3z > z' + 1$, on peut l'obtenir également avec six chiffres exacts, et son erreur absolue est inférieure à 0,00001.

Remarque. — La méthode des chiffres exacts nous a donné, dans les deux problèmes précédents, de moins bons résultats que les autres. C'est ce qui arrive presque toujours. En général, c'est la méthode des erreurs absolues qui est préférable.

39. Calculs complexes. — S'il s'agit d'un calcul complexe portant sur plusieurs nombres a', b', c', d', ..., on raisonnera de proche en proche. On déduira du nombre de chiffres exacts de a' et b' celui du résultat r' de l'opération à effectuer sur ces nombres; du nombre ainsi obtenu et du nombre de chiffres exacts de c' on déduira celui du résultat de l'opération à effectuer sur r' et c', et ainsi de suite.

Le plus souvent, il y a à chaque opération décroissance du nombre de chiffres exacts, d'après les deux derniers théorèmes, et la méthode est très désavantageuse.

Pour bien le montrer, appliquons-le à un problème déjà résolu par les erreurs absolues (n° **24**, 3°).

Le volume d'une sphère est exactement 10,25. *On prend pour* π *une valeur approchée telle que son erreur relative soit inférieure à* 0,000003. *Avec combien de chiffres exacts pourra-t-on obtenir son rayon?*

Supposons que nous prenions une valeur approchée de π p. e. dont l'erreur relative soit inférieure à 0,000003. Cette erreur étant inférieure à 0,00001, la valeur prise pour π aura cinq chiffres exacts. D'autre part, le volume étant connu exactement, le nombre $0,75 \times 10,25$ a tous ses chiffres exacts; donc le nombre de chiffres exacts de son quotient par la valeur approchée de π sera égal à quatre, puisque le sens de l'approximation est connu et que ni le dividende ni le diviseur ne commencent par 1. Enfin, le premier chiffre de ce quotient étant 2 et celui de sa racine cubique étant 1, le rayon pourra s'obtenir avec quatre chiffres exacts.

La méthode des erreurs absolues nous avait montré que les six premiers chiffres étaient exacts.

CHAPITRE III.

Calculs approchés : problèmes du second type.

---

40. Problèmes du second type. — L'énoncé général de ces problèmes est le suivant :

Étant donnés des nombres exacts ou susceptibles d'être calculés avec autant de décimales que l'on veut, trouver avec une approximation donnée à l'avance le résultat d'un calcul effectué sur ces nombres.

L'approximation du résultat peut être déterminée soit par son erreur absolue, soit par son erreur relative, soit par son nombre de chiffres exacts.

Cela fait donc trois problèmes. Nous donnerons pour les résoudre deux méthodes, dans chacune desquelles nous ramènerons les trois problèmes à un problème unique.

MÉTHODE DES ERREURS ABSOLUES.

41. Dans cette méthode on ramène, au moyen des théorèmes du Chapitre I, tous les problèmes à un problème fondamental dans lequel l'approximation du résultat du calcul est déterminée par la limite supérieure de son erreur absolue.

Si, en effet, on veut que l'erreur relative de l'expression numérique donnée soit inférieure à α'_1, il suffit de

calculer cette expression avec une erreur absolue inférieure à $a_2 \alpha'_1$, a_2 désignant une valeur grossièrement approchée p. d. du résultat, valeur toujours facile à calculer *a priori*.

Si, en second lieu, on veut avoir le résultat avec *n* chiffres exacts, on cherchera *a priori* l'ordre de son premier chiffre significatif à gauche, et l'on en déduira une limite supérieure de l'erreur absolue avec laquelle on devra calculer l'expression donnée.

Traitons donc uniquement le problème fondamental.

42. Problème fondamental. — *Calculer avec une erreur absolue inférieure à un nombre donné une expression numérique donnée.*

Il est clair que le résultat demandé pourra toujours être atteint si l'on prend *a priori* les nombres sur lesquels on opère avec un nombre suffisamment grand de chiffres. Ainsi, si l'on a à calculer le produit $\pi\sqrt{2}$ à 0,1 près, on n'a qu'à prendre chacun des nombres avec quatre décimales exactes; le nombre $3,1415 \times 1,4142$ sera une valeur approchée de $\pi\sqrt{2}$ avec une erreur inférieure à $(4+2) \times 0,0001 = 0,0006$: il répond donc à la question.

Ce procédé ne devra jamais être employé. Ce qu'on se propose, en effet, c'est d'éviter les tâtonnements, de faire le calcul en prenant le nombre minimum de chiffres dans chacun des nombres sur lesquels on opère et de garder au résultat le nombre minimum de chiffres.

Voici les principes de la méthode à suivre.

43. Définition. — *On dit qu'on calcule un nombre à* $\pm\,\omega$, *lorsqu'on cherche une valeur approchée de ce*

nombre, par défaut ou par excès, dont l'erreur absolue soit inférieure à ω.

Désignons par p l'ordre du premier chiffre significatif à gauche de l'approximation demandée ω : celle-ci sera alors égale à n unités de l'ordre p, le nombre n, compris entre 1 et 10, étant le plus souvent fractionnaire. Si, par exemple, on demande de calculer un nombre à ± 0,00375, l'ordre p sera celui des millièmes, et le nombre n sera égal à 3,75.

44. Ceci posé, convenons de supprimer dans le résultat demandé tous les chiffres suivant celui de l'ordre p. Nous commettons une erreur inférieure, d'après le théorème I, à une unité de l'ordre p.

Convenons en outre de forcer le dernier chiffre conservé d'une unité lorsque le premier chiffre supprimé est au moins égal à 5 : il est alors aisé de voir que l'erreur commise, au lieu d'être simplement inférieure à une unité de l'ordre p, ne dépasse pas une demi-unité de cet ordre. En effet, si le premier chiffre supprimé est l'un des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, et si l'on garde tel quel le chiffre des unités d'ordre p, l'erreur p. d. provenant de la suppression des chiffres suivants est inférieure à 5 unités de l'ordre immédiatement inférieur à p, c'est-à-dire à une demi-unité de l'ordre p. Si, au contraire, le premier chiffre supprimé est l'un des chiffres 5, 6, 7, 8, 9, et si l'on force d'une unité le chiffre des unités d'ordre p, on commet une erreur p. d. au moins égale à 5 unités de l'ordre immédiatement inférieur à p, et une erreur p. e. égale à une unité de l'ordre p, donc en tout une erreur p. e. au plus égale à une demi-unité de cet ordre.

Comme on ignore, en général, le sens de l'approxi-

mation, il est nécessaire de supposer que la nouvelle erreur ainsi commise s'ajoute à l'erreur donnée. Par suite, si le résultat doit être approché à $\pm n$ unités d'ordre p, il suffit de diriger les calculs de manière que l'erreur du résultat soit inférieure à $(n - \frac{1}{2})$ unités d'ordre p, quantité que nous désignerons par ε. Ainsi, dans l'approximation donnée plus haut, on a

$$\varepsilon = 3^{\text{mill.}},75 - 0^{\text{mill.}},5 = 3^{\text{mill.}},25.$$

45. Calculs simples. — On est conduit par ce qui précède à procéder de la façon suivante dans le cas des calculs simples. Ces calculs portant en général sur deux nombres a et b, une limite supérieure de l'erreur commise est de la forme $A_1\alpha_1 + B_1\beta_1$, A_1 et B_1 étant certaines fonctions des nombres a_1, b_1, a_2, b_2. Pour que l'inégalité [1]

$$A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 < \varepsilon$$

soit vérifiée, il suffit que l'on ait séparément [2]

$$A_1\alpha_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad B_1\beta_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On résout ces inégalités par rapport à α_1 et β_1, en arrondissant au besoin les nombres, mais de manière à forcer toujours les premiers membres et à réduire les seconds. Ayant ainsi des limites supérieures de α_1 et β_1,

---

(1) L'expression $A_1\alpha_1 + B_1\beta_1$ étant une limite supérieure de l'erreur, il suffirait en réalité de résoudre l'égalité $A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 = \varepsilon$. Il est clair qu'en la remplaçant par $A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 < \varepsilon$, l'erreur du résultat sera *a fortiori* inférieure à ε.

(2) Cette façon de procéder n'est nullement obligatoire. Pour résoudre cette inégalité, on peut prendre α_1 arbitraire, tel par exemple que $A_1\alpha_1 = \varepsilon' < \varepsilon$, puis déterminer β_1 par l'inégalité $B_1\beta_1 < \varepsilon - \varepsilon'$. Cette remarque peut trouver son application dans certains cas.

on négligera dans a et b autant de décimales qu'on peut le faire sans que les erreurs dépassent ces limites, et l'on fait le calcul sur les nombres a' et b' ainsi obtenus. Dans le résultat, on supprime tous les chiffres suivant celui d'ordre p, en forçant d'une unité ce dernier si le premier chiffre supprimé est au moins 5 : le nombre qui reste à gauche est le nombre cherché.

Si le calcul simple portait sur plus de deux nombres, on aurait à résoudre une inégalité de la forme

$$A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 + \ldots + M_1\mu_1 < \varepsilon.$$

Il suffirait alors qu'on eût séparément

$$A_1\alpha_1 < \frac{\varepsilon}{n}, \quad B_1\beta_1 < \frac{\varepsilon}{n}, \quad C_1\gamma_1 < \frac{\varepsilon}{n}, \quad \ldots, \quad M_1\mu_1 < \frac{\varepsilon}{n},$$

n étant le nombre des nombres a, b, c, ..., m sur lesquels l'opération doit être effectuée.

Voici des exemples de calcul simple.

1° *Calculer la somme* $\pi + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ *à* $\pm 0,0018$.

Posons

$$a = n = 3,14159\ldots,$$
$$b = \sqrt{3} = 1,73205\ldots,$$
$$c = \sqrt{2} = 1,41421\ldots.$$

L'inégalité

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 0,0018 - 0,0005 = 0,0013$$

sera satisfaite pour

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 < \frac{0,0013}{3} \quad \text{ou} \quad 0,0004;$$

d'où

$$a' = 3,1415, \qquad b' = 1,732, \qquad c' = 1,414.$$

$$a' + b' - c'$$
$$= 3,1415 + 1,732 - 1,414 = 4,8735 - 1,414 = 3,4595.$$

Le chiffre suivant celui des millièmes est 5 : forçons donc d'une unité le chiffre des millièmes et supprimons le suivant, nous avons finalement le résultat cherché qui est 3,460.

2° *Calculer à* $\pm 1^{m^2},25$ *la surface d'un rectangle dont les côtés ont pour longueur* $3^m,53772$ *et* $1^{décam},360138$.

Prenons pour unité de longueur le mètre et posons

$$a = 3,53772, \quad \text{d'où} \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 3,$$
$$b = 13,60138, \quad \text{d'où} \quad b_1 = 15, \quad b_2 = 10.$$

L'inégalité

$$b_1\alpha_1 + a_1\beta_1 < 1,25 - 0,5 = 0,75$$

sera vérifiée si l'on prend

$$b_1\alpha_1 < \frac{0,75}{2}, \qquad a_1\beta_1 < \frac{0,75}{2};$$

d'où

$$\alpha_1 < \frac{0,75}{30} = 0,025, \qquad \beta_1 < \frac{0,75}{8} \quad \text{ou} \quad 0,09.$$

Nous aurons donc

$$a' = 3,53, \qquad b' = 13,6,$$
$$a'b' = 3,53 \times 13,6 = 48,008.$$

La surface cherchée est donc 48^{m^2}.

3° *Calculer à* $\pm 0,0042$ *le nombre* $\dfrac{\sqrt{3}}{1,71259}$.

Posons

$$a = \sqrt{3}, \quad \text{d'où} \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1,$$
$$b = 1,71259, \quad \text{d'où} \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 1.$$

Pour vérifier l'inégalité

$$\frac{b_1\alpha_1 + a_1\beta_1}{b_2^2} < 0,0042 - 0,0005 = 0,0037.$$

il suffit de prendre

$$\alpha_1 < \frac{0,0037}{4} \quad \text{ou} \quad 0,0009, \qquad \beta_1 < 0,0009;$$

d'où

$$a' = 1,732, \qquad b' = 1,712,$$

$$\frac{a'}{b'} = 1,0011\ldots.$$

Le résultat cherché est donc 1,001.

4° *Calculer avec* 13 *décimales exactes le nombre* $\frac{\pi}{64800}$.

Si nous appelons α_1 une limite supérieure de l'erreur de π, il suffira d'avoir

$$\frac{\alpha_1}{64800} < \frac{1}{10^{13}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^{13}} = \frac{5}{10^{14}},$$

d'où

$$\alpha_1 < \frac{324}{10^{11}}.$$

Il suffit donc de prendre pour π le nombre 3,141592653. Le calcul donne alors

$$0,0000484813681$$

pour le nombre cherché.

46. Calculs complexes. — Un calcul complexe comporte, on le sait, une suite de plusieurs calculs simples dont le dernier donne le résultat demandé. Si l'approximation de ce résultat doit être de n unités d'ordre p, il suffit de diriger le calcul de manière que l'erreur du résultat soit inférieure à $(n - \frac{1}{2})$ unités d'ordre p. La dernière opération portant sur différents nombres, on cherchera, comme pour les calculs simples, des limites supérieures des erreurs absolues de ces nombres. Mais ces nombres eux-mêmes sont les résultats de calculs antérieurs effectués sur d'autres nombres; on déterminera de la même manière des limites supérieures des approximations avec lesquelles on doit connaître ces nombres, et ainsi de suite. Con-

naissant alors les approximations avec lesquelles on doit prendre les nombres donnés et calculer les résultats des diverses opérations, on effectue successivement ces dernières jusqu'à ce qu'on ait obtenu le résultat demandé.

Pour disposer les calculs avec ordre, nous procéderons comme l'a indiqué M. Guyou dans sa *Note sur les approximations numériques* :

1° *On commence par remplacer par des lettres les nombres donnés, un même nombre devant être représenté par autant de lettres distinctes qu'il entre de fois dans l'expression considérée;*

2° *On prépare un Tableau en quatre colonnes, ayant respectivement pour titres : nombres, valeurs approchées, approximations, résultats;*

3° *Dans la première colonne, on écrit les nombres donnés et les opérations à effectuer successivement, en désignant par de nouvelles lettres les résultats qu'on trouverait en les effectuant;*

4° *Dans la deuxième colonne, qu'on divise en deux, on inscrit des valeurs grossièrement approchées par excès et par défaut des nombres de la première colonne (quelques-unes de ces valeurs peuvent ne pas servir);*

5° *Dans la troisième colonne, on inscrit d'abord sur sa dernière ligne l'approximation demandée, puis les approximations qui en résultent pour les nombres intervenant dans la dernière opération, et ainsi de suite en remontant jusqu'à ce que cette colonne soit remplie;*

6° *Dans la dernière colonne, on écrit en premier lieu les valeurs approchées des nombres désignés au début par des lettres : il suffit pour cela de négliger*

dans chacun d'eux autant de décimales qu'on peut le faire sans que l'erreur dépasse les limites trouvées pour les approximations (¹). *On écrit ensuite, au fur et à mesure, les résultats des opérations indiquées dans la première colonne, chaque opération étant faite avec les nombres approchés antérieurement obtenus : on devra pousser les calculs jusqu'au premier chiffre significatif à gauche de l'approximation correspondante, et se rendre compte de la grandeur du chiffre suivant, afin de forcer d'une unité le dernier chiffre conservé dans chaque résultat si le premier chiffre supprimé est égal ou supérieur à* 5.

Voici deux exemples de ce genre de calcul :

1° *Calculer à* 0,0001 *près le nombre* $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$:

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	p. d.	Approximations.	Résultats.
$a = \pi$	3,2	3	0,000005	3,14159
$b = a^2$	11	9	0,00004	9,86959
$c = \sqrt{3}$	1,8	1,7	0,0000065	1,73205
$x = \frac{b}{c}$	6,5	5	0,0001	5,6982

Erreurs de b' et de c' :

$$\frac{c_1\beta_1 + b_1\gamma_1}{c_1^2} < 0{,}0001 - 0{,}00005 = 0{,}00005;$$

$$\beta_1 < 0{,}00004, \qquad \gamma_1 < 0{,}0000065.$$

(¹) On peut souvent trouver une valeur approchée p. e. qui remplisse les mêmes conditions que la valeur p. d. : on prendra celle qui contient le moins de chiffres.

Erreur de a' :

$$2a_1\alpha_1 < 0{,}00004 - 0{,}000005 = 0{,}000035; \qquad \alpha_1 < 0{,}000005.$$

Le nombre demandé est 5,6982.

2° *Calculer le nombre* $n = \frac{(\sqrt{2} + 2{,}57812)^2}{2{,}57812}$ *de manière que son erreur relative soit inférieure à* 0,001.

Une valeur approchée p. d. de n est $n_2 = \frac{(1+2)^2}{3} = 3$. Il suffit donc que l'erreur absolue de n soit inférieure à

$$3 \times 0{,}001 = 0{,}003.$$

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	p. d.	Approximations.	Résultats.
$a = \sqrt{2}$	2	1	0,00003	1,4142
$b = 2{,}57812$	3	2	0,00003	2,5781
$c = a + b$	5	3	0,00011	3,992
$d = c^2$	25	9	0,0016	15,936
$e = 2{,}57812$	3	2	0,0002	2,578
$n = \frac{d}{e}$	13	3	0,003	6,182

Erreurs de d' et e' :

$$\frac{e_1\delta_1 + d_1\varepsilon_1}{e_2^2} < 0{,}003 - 0{,}0005 = 0{,}0025;$$

$$\delta_1 < 0{,}0016, \qquad \varepsilon_1 < 0{,}0002.$$

Erreur de c' :

$$2c_1\gamma_1 < 0{,}0016 - 0{,}0005 = 0{,}0011; \qquad \gamma_1 < 0{,}00011.$$

Erreurs de a' et b' :

$$\alpha_1 + \beta_1 < 0{,}00011 - 0{,}00005 = 0{,}00006; \qquad \alpha_1 = \beta_1 < 0{,}00003.$$

Le nombre cherché est 6,182.

MÉTHODE DES CHIFFRES EXACTS.

47. On ramène dans cette méthode, qui ne peut s'appliquer qu'aux expressions monomes, tous les problèmes au problème fondamental suivant :

48. **Problème fondamental.** — *Calculer avec un nombre donné de chiffres exacts une expression numérique monome donnée.*

Voici les deux théorèmes sur lesquels repose la résolution de ce problème :

49. **Multiplication et division.** — **Théorème.** — *Pour obtenir avec n chiffres exacts le produit ou le quotient de deux nombres donnés exactement ou susceptibles d'être calculés avec autant de décimales que l'on veut, il suffit de prendre chaque nombre avec* $n+1$ *ou* $n+2$ *chiffres exacts suivant que son premier chiffre significatif est supérieur ou égal à* 1, *et de manière à obtenir le résultat par défaut; on effectue l'opération et dans le résultat on supprime tous les chiffres suivant le* $n^{\text{ième}}$ *que l'on force d'une unité.*

Gardons les mêmes notations que précédemment.

Si z et z' sont plus grands que 1, prenons chacun des nombres avec $n+1$ chiffres exacts de manière à obtenir le résultat p. d. L'erreur relative de leur produit ou de leur quotient est alors inférieure à

$$\frac{1}{10^n}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}\right)$$

et, par suite, à $\frac{1}{10^n}$. Le théorème résulte alors immédiatement du théorème IV.

Si l'on a $z = 1$ et $z' > 1$, prenons $n + 2$ chiffres exacts dans le premier nombre et $n + 1$ dans l'autre, toujours de manière à obtenir le résultat p. d. L'erreur relative du produit ou du quotient sera inférieure à $\frac{1}{10^n}\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{10z}\right)$, donc à $\frac{1}{10^n}$, et le théorème reste vrai.

On verra de même que, si $z = z' = 1$, il suffit de prendre les deux nombres avec $n + 2$ chiffres exacts par défaut.

50. **Racine carrée (ou cubique). — Théorème. —** *Pour obtenir avec n chiffres exacts la racine carrée (ou cubique) d'un nombre donné exactement ou susceptible d'être calculé avec autant de décimales que l'on veut, il suffit de prendre, de manière à obtenir cette racine par défaut, n ou $n + 1$ chiffres exacts dans le nombre suivant que le double du premier chiffre significatif du nombre (le triple s'il s'agit de la racine cubique) est supérieur ou non au premier chiffre significatif de la racine; on effectue l'opération et dans le résultat on supprime tous les chiffres suivant le $n^{ième}$ que l'on force d'une unité.*

Si, en effet, $2z \geqq z' + 1$ et si nous prenons n chiffres dans le nombre, son erreur relative est inférieure à $\frac{1}{z \times 10^{n-1}}$, donc celle de la racine carrée est inférieure à $\frac{1}{2z \times 10^{n-1}} \leqq \frac{1}{(z'+1)10^{n-1}}$. La racine étant obtenue p. d., le théorème résulte immédiatement du théorème IV.

On démontre de même le théorème si $2z < z' + 1$ et dans le cas de la racine cubique.

51. Calculs simples. — Ce sont des applications des deux théorèmes qui précèdent. Exemple :

Calculer à $\pm 1^{m^2},25$ *la surface d'un rectangle dont les côtés ont pour longueur* $3^m,53772$ *et* $13^m,60138$.

Il suffit évidemment que le nombre cherché, qui a deux chiffres à la partie entière, soit obtenu avec deux chiffres exacts; l'erreur absolue sera en effet inférieure à 1 et, par suite, à 1,25.

Pour cela il faut prendre le premier nombre avec trois chiffres exacts et le second avec quatre, ce qui donne $48^{m^2},008$. La surface cherchée est alors 49^{m^2}. Nous avions trouvé antérieurement (n° 45, 2°) 48^{m^2}; les deux solutions conviennent : l'une est p. e., l'autre est p. d.

52. Calculs complexes. — S'il s'agit d'un calcul complexe, on commence par chercher avec combien de chiffres exacts il faut avoir le résultat. La dernière opération portant sur différents nombres, on en déduira le nombre de chiffres exacts qu'on doit prendre dans chacun d'eux. Mais ces nombres eux-mêmes sont les résultats d'opérations antérieures effectuées sur d'autres nombres : on cherchera avec combien de chiffres exacts on doit prendre ces derniers, et ainsi de suite.

La méthode est en réalité très désavantageuse dès qu'il y a plus de deux opérations à effectuer, car le nombre des chiffres à conserver augmente rapidement, surtout lorsque quelques-uns des nombres donnés commencent par l'unité. Cet inconvénient, joint à celui signalé plus haut que la méthode des chiffres exacts ne se prête qu'aux calculs monomes, nous montre que c'est la méthode des erreurs absolues qui est préférable

dès que le calcul comprend plus de deux opérations. Donnons un exemple :

Calculer $\pi^3\sqrt{3}$ à moins de $\frac{1}{100}$ de sa vraie valeur.

Il suffit (théorème III) de calculer ce produit avec trois chiffres exacts. On verra facilement qu'il faut prendre π avec six chiffres pour en faire le carré, en conserver cinq dans ce carré, multiplier ce nombre par π pris avec cinq chiffres pour avoir π^3, en conserver quatre dans ce cube, prendre $\sqrt{3}$ avec cinq chiffres pour faire le produit considéré, et conserver trois chiffres au résultat, ce qui donne le nombre 53,7.

Au contraire, traitons la question par les erreurs absolues, en prenant $30 \times \frac{1}{100} = 0,3$ pour limite supérieure de l'erreur du nombre cherché.

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	p. d.	Approximations.	Résultats.
$a = \pi$	4	3	0,001	3,141
$b = \pi$	4	3	0,0006	3,141
$c = b^2$	16	9	0,006	9,866
$d = ac$	64	27	0,06	30,99
$e = \sqrt{3}$	2	1	0,001	1,732
$n = de$	128	27	0,3	53,7

Erreurs de d' et e' :

$$e_1\delta_1 + d_1\varepsilon_1 < 0,3 - 0,05 = 0,25; \qquad \delta_1 < 0,06, \qquad \varepsilon_1 < 0,001.$$

Erreurs de a' et c' :

$$c_1\alpha_1 + a_1\gamma_1 < 0,06 - 0,005 = 0,055;$$
$$\alpha_1 < 0,001, \qquad \gamma_1 < 0,006.$$

Erreur de b' :

$$2b_1\beta_1 < 0,006 - 0,0005 = 0,0055; \qquad \beta_1 < 0,0006.$$

L'avantage de la méthode des erreurs absolues est manifeste.

REMARQUES SUR LE CALCUL DE CERTAINES EXPRESSIONS IRRATIONNELLES.

53. On a coutume de dire que les expressions numériques contenant des radicaux superposés ou un ou plusieurs radicaux en dénominateur se prêtent mal au calcul. Il faut entendre par là que non seulement les opérations élémentaires sur ces expressions, mais encore leur calcul approché, sont plus commodes lorsqu'on a préalablement désuperposé leurs radicaux ou rendu leur dénominateur rationnel. Cela est surtout vrai si ces transformations n'augmentent pas le nombre des opérations et si elles rendent le dénominateur commensurable.

Ainsi, si l'on a à calculer $\frac{1+\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\pi}}$ avec une approximation donnée, il n'y a aucun intérêt à remplacer ce nombre par $\frac{\sqrt{\pi}(1+\sqrt[3]{2})}{\pi}$ qui comporte une opération de plus sans que le dénominateur ait été rendu commensurable.

Soit au contraire à calculer, par exemple, le nombre $n = \frac{a}{\sqrt{b}}$; b étant un nombre entier et a un nombre quelconque.

Si nous calculons directement cette expression en posant $c = \sqrt{b}$, $n = \frac{a}{c}$, nous aurons

$$\frac{c_1\alpha_1 + a_1\gamma_1}{b_2} < \varepsilon,$$

$$\alpha_1 < \frac{b_2\varepsilon}{2c_1}, \qquad \gamma_1 < \frac{b_2\varepsilon}{2a_1}.$$

Nous savons ainsi combien nous devons prendre de chiffres dans a et avec quelle approximation nous devons calculer c.

Si maintenant nous calculons n en écrivant $n = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ et posant $c = \sqrt{b}$, $d = ac$, $n = \frac{d}{b}$, nous aurons

$$\frac{\delta_1}{b} < \varepsilon, \quad \text{d'où} \quad \delta_1 < b\varepsilon;$$

puis

$$c_1\alpha_1 + a_1\gamma_1 < b\varepsilon - \varepsilon',$$

ε' désignant une demi-unité de l'ordre du premier chiffre significatif à gauche de $b\varepsilon$. On tire de là

$$\alpha_1 < \frac{b\varepsilon}{2c_1} - \frac{\varepsilon'}{2c_1}, \qquad \gamma_1 < \frac{b\varepsilon}{2a_1} - \frac{\varepsilon'}{2a_1}.$$

Comme on a $b > b_2$ et que ε' est relativement petit, il en résulte que le calcul par le second procédé sera en général plus avantageux, les opérations portant sur des nombres pouvant comprendre moins de chiffres.

Ces considérations peuvent s'étendre à des expressions irrationnelles plus compliquées. Donnons comme exemple le calcul à 0,001 près de l'expression

$$n = \frac{1}{\sqrt{3,26} - \sqrt{2,51}},$$

effectué successivement par les deux méthodes.

Calcul de $n = \frac{1}{\sqrt{3,26} - \sqrt{2,51}}$ *à* 0,001 *près.*

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	Valeurs approchées p. d.	Approximations.	Résultats.
$a = \sqrt{3,26}$	1,9	1,7	0,000002	1,805547
$b = \sqrt{2,51}$	1,6	1,4	0,000002	1,584297
$c = a - b$	0,5	0,1	0,000005	0,221250
$n = \frac{1}{c}$	10	2	0,001	4,520

Erreur de c' :

$$\frac{\gamma_1}{c_2^2} < 0{,}001 - 0{,}0005 = 0{,}0005; \qquad \gamma_1 < 0{,}000005.$$

Erreurs de a' et b' :

$$\alpha_1 + \beta_1 < 0{,}000005 - 0{,}0000005 = 0{,}0000045;$$
$$\alpha_1 = \beta_1 < 0{,}000002.$$

$$\textit{Calcul de } n = \frac{\sqrt{3{,}26} + \sqrt{2{,}51}}{0{,}75} \textit{ à } 0{,}001 \textit{ près.}$$

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	p. d.	Approximations.	Résultats.
$a = \sqrt{3{,}26}$	1,9	1,7	0,0001	1,8055
$b = \sqrt{2{,}51}$	1,6	1,4	0,0001	1,5843
$c = a + b$	3,5	3,1	0,0003	3,3898
$n = \dfrac{c}{0{,}75}$	5	4	0,001	4,520

Erreur de c' :

$$\frac{\gamma_1}{0{,}75} < 0{,}001 - 0{,}0005 = 0{,}0005; \qquad \gamma_1 < 0{,}0003.$$

Erreurs de a' et b' :

$$\alpha_1 + \beta_1 < 0{,}0003 - 0{,}00005 = 0{,}00025; \qquad \alpha_1 = \beta_1 < 0{,}0001.$$

Le nombre cherché est 4,520.

CHAPITRE IV.

Notions sur les opérations abrégées.

54. Pour trouver avec une approximation donnée à l'avance le résultat d'un calcul simple effectué sur des nombres entiers ou décimaux, on peut employer des procédés abrégés. Dans chacun d'eux, on suppose que l'approximation est exactement d'une unité d'un certain ordre. Il est clair qu'on peut toujours faire cette hypothèse : car, si l'on a à calculer un nombre à moins de n unités d'ordre $p (1 \leqq n < 10)$, il suffit de le calculer à moins d'une unité de cet ordre.

55. Addition abrégée. — Théorème. — *Pour trouver à moins d'une unité d'ordre p la somme de dix nombres au plus, on évalue chacun d'eux par défaut à moins d'une unité dix fois plus petite que celles d'ordre p, on fait la somme de ces nombres, on supprime dans le résultat le dernier chiffre à droite et l'on force d'une unité le dernier chiffre conservé.*

En effet, la somme des nombres approchés diffère de la somme exacte de moins de dix unités dix fois plus petites que celles d'ordre p, c'est-à-dire de moins d'une unité d'ordre p. Comme elle est approchée p. d., la règle s'ensuit immédiatement, d'après le théorème II.

Remarque. — Si l'on a à ajouter plus de dix et moins de cent nombres, on évalue chacun d'eux p. d. à moins d'une unité cent fois plus petite que celles d'ordre p, on fait la somme de ces nombres, on supprime dans le résultat les deux derniers chiffres à droite et l'on force d'une unité le dernier chiffre conservé. La démonstration est la même et se généralise aisément.

56. **Soustraction abrégée.** — **Théorème.** — *Pour trouver à moins d'une unité d'ordre p la différence de deux nombres, on évalue chacun d'eux par défaut à moins d'une unité de cet ordre et l'on fait la différence de ces nombres.*

En effet, l'erreur du premier nombre affecte la différence p. d., celle du second l'affecte p. e., et la différence est affectée d'une erreur égale à la différence des erreurs, évidemment inférieure à une unité d'ordre p, puisque chacune d'elles est inférieure à une unité d'ordre p.

Exemple :

Calculer la somme $\pi + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ *à* $\pm 0,0018$.

Il suffit de la calculer à moins de 0,001. Pour cela, nous évaluons π et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ à moins de 0,0001 :

$\pi = 3,1415$	1,7320	3,1415
	1,4142	0,3178
	0,3178	3,4593

D'où le nombre 3,460.

On pourra comparer avec le n° 45, 1°.

57. **Multiplication abrégée.** — **Théorème.** — *Pour trouver à moins d'une unité d'ordre p le produit de deux nombres, on écrit le multiplicateur renversé sous*

le multiplicande, en plaçant le chiffre des unités simples du multiplicateur sous le chiffre du multiplicande qui représente des unités cent fois plus petites que celles d'ordre p. On fait le produit du multiplicande successivement par chacun des chiffres du multiplicateur, en commençant chacun de ces produits au chiffre du multiplicande placé au-dessus du chiffre par lequel on multiplie, et l'on écrit tous ces produits de manière que leurs premiers chiffres à droite soient dans une même colonne verticale. On fait la somme des produits partiels ainsi obtenus, on supprime dans le résultat les deux derniers chiffres à droite et l'on force d'une unité le dernier chiffre conservé. En faisant exprimer à ce chiffre des unités d'ordre p, on a le produit cherché.

Soit par exemple à *calculer à* $\pm$ 0,001 *le produit suivant :*

$$61,7829541 \times 5,435716217.$$

La méthode des erreurs absolues ou celle des chiffres exacts conduit à opérer sur les nombres 61,7829 et 5,435716. Pour montrer l'avantage de la règle précédente, faisons le Tableau de cette dernière opération et de la multiplication abrégée :

61,7829	617829541
5,435716	7126175345
3706974	30891475
617829	2471316
4324803	185346
3089145	30890
1853487	4319
2471316	61
3089145	36
335,8342980564	33583443

Le premier résultat est 335,834; le second est 335,835. Ces deux résultats conviennent également tous deux et sont approchés en sens contraire.

Démonstration. — Tout d'abord, chacun des produits partiels de l'opération abrégée représente des cent-millièmes : ils peuvent en effet s'écrire

$$\frac{6178295}{10^5} \times 5, \quad \frac{617829}{10^4} \times \frac{4}{10}, \quad \frac{61782}{10^3} \times \frac{3}{10^2}, \quad \dots$$

Il est donc logique de placer leurs derniers chiffres à droite dans une même colonne verticale. Cette remarque faite, cherchons des limites supérieures des erreurs p. d. commises.

En premier lieu, dans chacune des multiplications, on a négligé au multiplicande des nombres respectivement inférieurs à

$$\frac{1}{10^5}, \quad \frac{1}{10^4}, \quad \dots, \quad 1, \quad 10.$$

Ces nombres auraient dû être multipliés respectivement par

$$5, \quad \frac{4}{10}, \quad \dots, \quad \frac{1}{10^5}, \quad \frac{6}{10^6}.$$

La somme des erreurs ainsi commises est inférieure à

$$\frac{5+4+3+5+7+1+6}{10^5}.$$

En second lieu, on a négligé le produit du multiplicande par 0,000000217. L'erreur ainsi commise est inférieure à $10^3 \times \frac{3}{10^7}$, puisque le multiplicande est inférieur à 10^3 et le nombre 0,000000217 à $\frac{3}{10^7}$. La

limite de cette nouvelle erreur peut s'écrire

$$\frac{2+1}{10^5}.$$

La somme de ces deux erreurs p. d. est une erreur p. d. ayant pour limite supérieure

$$(1) \qquad \frac{(5+4+3+5+7+1+6+2)+1}{10^5}.$$

Or le numérateur de la fraction précédente, dans lequel la parenthèse est la somme des huit premiers chiffres du multiplicateur, est inférieur à 100; l'erreur est donc inférieure à $\frac{1}{10^3}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème II pour démontrer complètement la règle.

Toutefois, si la fraction (1) avait son numérateur supérieur à 100, mais inférieur à 1000, la règle devrait se modifier. On verra facilement que le raisonnement s'applique si l'on place le chiffre des unités simples du multiplicateur sous le chiffre du multiplicande représentant des unités mille fois plus petites que celles d'ordre p.

58. Division abrégée. — Théorème. — *Pour trouver à moins d'une unité d'ordre p le quotient de deux nombres, on commence par déterminer l'ordre des plus hautes unités du quotient et l'on en déduit le nombre n des chiffres exacts à obtenir. On forme le premier diviseur en prenant sur la gauche du diviseur donné, à partir de son premier chiffre significatif, un nombre au moins égal à n et en écrivant à sa droite les n chiffres suivants du diviseur donné; on forme le premier dividende en prenant sur la gauche du dividende donné, à partir de son premier chiffre*

significatif, un nombre contenant le premier diviseur au moins une fois et moins de dix fois [1] : *le quotient entier du premier dividende par le premier diviseur est le premier chiffre du quotient cherché. On forme le second diviseur en supprimant le dernier chiffre à droite du premier diviseur, et le second dividende en retranchant du premier dividende le produit du premier diviseur par le premier chiffre du quotient : le quotient entier du second dividende par le second diviseur est le second chiffre du quotient. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu le $n^{ième}$ chiffre du quotient. En faisant exprimer à ce chiffre des unités d'ordre p, on a le quotient cherché.*

Soit par exemple à *calculer à* $\pm$ 0,0001 *le quotient suivant :*

$$51,4678053412 : 0,035711264359 3.$$

La méthode des erreurs absolues conduirait à faire le quotient de 5146780500 0 par 35711264; celle des chiffres exacts serait encore plus désavantageuse. Montrons l'avantage de la division abrégée en faisant cette opération vis-à-vis de celle à laquelle conduirait la méthode des erreurs absolues :

51467805000	35711264	5146780534	$3571\dot{1}\dot{2}\dot{6}\dot{4}\dot{3}\dot{5}$
157565410	1441,22047	1575654099	14412204
147203540		147203527	
43584840		4358471	
78735760		787345	
73132320		73121	
170979200		1699	
281341440		271	

(1) S'il n'y a pas assez de chiffres dans le dividende et le diviseur pour former ces nombres, on écrit des zéros à la place des chiffres qui manquent.

Par les erreurs absolues, on obtient 1441,2205 p. e.; par la division abrégée, on obtient 1441,2204 p. d.

Démonstration. — On voit de suite que les plus hautes unités du quotient sont des dizaines de mille; il faut donc trouver huit chiffres exacts au quotient.

Le premier diviseur s'obtient en prenant $35 \geqq 8$ et écrivant à sa droite les huit chiffres suivants du diviseur donné : on en déduit sans peine le premier dividende. Chacun des produits partiels représente alors des cent-millionièmes; ils peuvent en effet s'écrire

$$\frac{35711126435}{10^{11}} \times 10^3, \quad \frac{3571112643}{10^{10}} \times 4 \times 10^2, \quad \ldots, \quad \frac{357}{10^4} \times \frac{4}{10^4}.$$

Il est donc logique de placer leurs derniers chiffres à droite sous le chiffre des cent-millionièmes du dividende.

Cherchons alors des limites supérieures des erreurs commises dans les opérations successives, en remarquant que malgré les apparences le dividende n'a été altéré dans aucune d'elles : en effet, c'est uniquement pour simplifier l'écriture qu'on y a négligé les chiffres suivant celui des cent-millionièmes, ceux-ci n'ayant à intervenir dans aucune soustraction.

On sait que l'erreur du quotient $\frac{a}{b'}$ est $\frac{a\beta}{bb'}$; elle a donc pour limite supérieure $\left(\text{lim. sup. de } \frac{a}{b}\right) \times \frac{\beta_1}{b_2}$, de sorte que les différentes erreurs sont respectivement inférieures à

$$(10^4) \times \frac{1}{10^{11}} \times \frac{1}{0{,}035} = \frac{1}{35 \times 10^4},$$

$$(10^3) \times \frac{1}{10^{10}} \times \frac{1}{0{,}035} = \frac{1}{35 \times 10^4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{1}{10^3}\right) \times \frac{1}{10^4} \times \frac{1}{0{,}035} = \frac{1}{35 \times 10^4}.$$

Toutes ces erreurs sont p. e., puisque le diviseur est pris p. d., et ont pour somme une erreur p. e. inférieure à $\frac{8}{35} \times \frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^4}$, car la fraction $\frac{8}{35}$ est, d'après la règle, toujours inférieure à 1. Il suffit alors d'appliquer le théorème II pour achever la démonstration.

Remarques. — 1° On ne doit jamais dépasser au quotient le nombre de chiffres pour lequel l'opération a été disposée.

2° Il peut se présenter, dans la division abrégée, une circonstance particulière qui ne se présente pas dans la division ordinaire : un dividende partiel peut contenir dix fois le diviseur de même rang. Il faut dans ce cas forcer le chiffre précédemment trouvé d'une unité et remplacer par des zéros tous ceux qui restent à obtenir.

Soit par exemple à *trouver à moins de* 0,000001 *le quotient suivant :*

0,020149587722346 : 3,731412895.

Les plus hautes unités du quotient étant des millièmes, nous avons quatre chiffres à trouver. Il faut donc faire la division abrégée de 2014958 par 373141. Commençons l'opération.

2014958	373141 (dernières décimales pointées)
149253	53 | 10 | 0
37311	
1	

Pour trouver le troisième chiffre, il faut diviser 37311 par 3731, ce qui donne pour quotient 10 et pour reste 1. Le quotient est alors le nombre 5400 : tous les chiffres suivant le quotient 10 sont en effet, dans ce cas et dans tous les cas analogues, des zéros, puisqu'il ne reste

qu'un nombre d'un chiffre et que le dernier diviseur a au moins deux chiffres.

Finalement, le nombre cherché est 0,005400.

59. Racine carrée abrégée. — Théorème. — *Pour trouver les derniers chiffres de la racine carrée à une unité près d'un nombre entier lorsque, cette racine ayant* $2m$ *ou* $2m+1$ *chiffres, on en a déjà trouvé* $m+1$, *on écrit à la suite du* $(m+1)^{ième}$ *reste partiel la première moitié des chiffres non utilisés et l'on divise le nombre ainsi formé par le double du nombre formé par les chiffres déjà trouvés à la racine. On opère de même lorsque, la racine ayant* $2m$ *chiffres dont le premier est au moins égal à* 5, *on en connaît déjà les* m *premiers.*

Soit N le nombre dont nous cherchons la racine à une unité près; soit a le nombre formé par les chiffres déjà trouvés auxquels nous conservons leur valeur relative, ce qui se fait en écrivant à la droite des chiffres déjà trouvés autant de zéros qu'il y a de chiffres à obtenir, et soit enfin $a+b$ la racine exacte, de sorte que b est généralement un nombre incommensurable [1].

Nous avons

$$N = (a+b)^2,$$

d'où

$$\frac{N-a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}. \tag{1}$$

Soit, d'autre part, q le quotient entier de $N-a^2$ par $2a$; on a

$$\frac{N-a^2}{2a} = q + \frac{r}{2a} \qquad (r < 2a). \tag{2}$$

---

[1] Nous supposons connues, dans cette démonstration et dans la suivante, quelques notions sur les nombres incommensurables.

La comparaison des égalités (1) et (2) donne alors l'une ou l'autre des relations

$$q = b + \left(\frac{b^2}{2a} - \frac{r}{2a}\right), \qquad q = b - \left(\frac{r}{2a} - \frac{b^2}{2a}\right):$$

pour que la proposition soit établie, il suffit de montrer que la différence entre $\frac{r}{2a}$ et $\frac{b^2}{2a}$ est < 1.

Or $\frac{r}{2a}$ est < 1; je dis que $\frac{b^2}{2a}$ est < 1. En effet, si la racine, à une unité près, a $2m+1$ chiffres et si l'on en connaît les $m+1$ premiers, on a

$$a \geqq 10^{2m}, \qquad b < 10^m,$$
$$2a \geqq 10^{2m}, \qquad b^2 < 10^{2m},$$

d'où

$$\frac{b^2}{2a} < \frac{10^{2m}}{10^{2m}} = 1.$$

On ferait une démonstration toute semblable lorsque la racine à une unité près a $2m$ chiffres; on trouve même dans ce cas que $\frac{b^2}{2a}$ est $< \frac{1}{10}$.

Si enfin la racine à une unité près a $2m$ chiffres dont le premier est $\geqq 5$ et si l'on connaît les m premiers, on a

$$a \geqq 5 \times 10^{2m-1}, \qquad b < 10^m,$$
$$2a \geqq 10^{2m}, \qquad b^2 < 10^{2m},$$

d'où

$$\frac{b^2}{2a} < 1.$$

Dans tous les cas, il suffit donc, pour avoir les k derniers chiffres, de trouver le quotient entier de $N - a^2$ par $2a$. Or $2a$ s'obtient en écrivant à la droite du double de la partie trouvée à la racine k zéros, et $N - a^2$ en écrivant à la droite du dernier reste partiel les $2k$ chiffres non utilisés dans N. Par suite, pour trouver ce quotient, on négligera sur la droite de $N - a^2$

les k derniers chiffres (ce qui revient à le diviser d'abord par 10^k), puis on divisera le nombre ainsi obtenu par le double du nombre formé par les chiffres trouvés.

Exemple :

Calculer $\sqrt{\pi}$ *à* $\pm 0,000001$.

Le calcul montre qu'il suffit de prendre pour π le nombre 3,141592. Pour calculer sa racine à 0,000001 près, il faut d'abord chercher la racine à une unité près du nombre 3141592000000. Cette racine a sept chiffres; cherchons les quatre premiers. Nous obtenons ainsi, à la racine, le nombre 1772. Pour trouver les trois derniers, il suffit de diviser 1608000 par 3544; on trouve ainsi, par la division abrégée, le nombre 453.

Le nombre cherché est donc 1,772453.

Voici le Tableau de l'opération directe et de l'opération abrégée :

3141592000000	1772453
214	27.7
2515	347.7
8692	3542.2
160800	35444.4
1902400	354485.5
12997500	3544903.3
2362791	

3141592	1772
214	27.7
2515	347.7
8692	3542.2
1608	

16080	3544
1904	453
184	
29	

60. Racine cubique approchée. — Théorème. — *Pour trouver les derniers chiffres de la racine cubique à une unité près d'un nombre entier lorsque, cette racine ayant* $2m$ *chiffres, on en a déjà trouvé* $m+1$, *ou que, cette racine ayant* $2m+1$ *chiffres, on en a déjà trouvé* $m+2$, *on écrit à la suite du dernier reste partiel le premiers tiers des chiffres non utilisés et l'on divise le nombre ainsi obtenu par le triple du carré du nombre formé par les chiffres déjà trouvés à la*

racine. On opère de même lorsque, la racine ayant $2m+1$ chiffres dont le premier est au moins égal à 2, on en connaît déjà les $m+1$ premiers.

Gardons les mêmes notations que dans le théorème précédent, et soit $a+b$ la racine exacte.

De l'égalité $N=(a+b)^3$ on tire

$$(1)\qquad \frac{N-a^3}{3a^2}=b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}.$$

Si, d'autre part, q est le quotient entier de $N-a^3$ par $3a^2$, on a

$$(2)\qquad \frac{N-a^3}{3a^2}=q+\frac{r}{3a^2}\qquad (r<3a^2).$$

La comparaison des égalités (1) et (2) donne alors l'une ou l'autre des relations

$$q=b+\left(\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{r}{3a^2}\right),$$
$$q=b-\left(\frac{r}{3a^2}-\frac{b^2}{a}-\frac{b^3}{3a^2}\right):$$

il suffit donc d'établir que la différence entre $\frac{r}{3a^2}$ et $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$ est <1.

Or $\frac{r}{3a^2}$ est <1; je dis que $\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$ est <1. En effet, si la racine à une unité près a $2m$ chiffres et si l'on en connaît les $m+1$ premiers, on a

$$a\geqq 10^{2m-1},\qquad b<10^{m-1},$$
$$a^2\geqq 10^{4m-2},\qquad b^2<10^{2m-2},$$
$$3a^2>10^{4m-2},\qquad b^3<10^{3m-3},$$

d'où

$$\frac{b^2}{a}<\frac{1}{10},\qquad \frac{b^3}{3a^2}<\frac{1}{10^{m+1}}.$$

La somme considérée est donc <1.

On raisonnerait de même si, la racine ayant $2m+1$ chiffres, on en connaît déjà les $m+2$ premiers.

Enfin, si la racine, à une unité près, a $2m+1$ chiffres dont le premier est $\geqq 2$ et si l'on connaît les $m+1$ premiers, on a

$$a \geqq 2\times 10^{2m}, \qquad b < 10^m,$$
$$a^2 \geqq 4\times 10^{4m}, \qquad b^2 < 10^{2m},$$
$$3a^2 > 10^{4m+1}, \qquad b^3 < 10^{3m};$$

d'où

$$\frac{b^2}{a} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{b^3}{3a^2} < \frac{1}{10^{m+1}}.$$

La somme $\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2}$ est encore < 1, ce qui achève la démonstration du théorème.

Exemple :

Calculer à $\pm 0,000001$ *le rayon de la sphère dont le volume est* 1^{m^3}.

Dressons d'abord le Tableau d'approximation du rayon

$$R = \sqrt[3]{\frac{0,75}{\pi}}:$$

Nombres.	Valeurs approchées p. e.	p. d.	Approximations.	Résultats.
$a = \pi$	4	3	0,0000048	3,14159
$b = \frac{0,75}{a}$	0,25	0,18	0,00000045	0,2387326
$R = \sqrt[3]{b}$	0,7	0,5	0,000001	0,620350

Erreur de b' :

$$\frac{\beta_1}{3\sqrt[3]{0,0324}} < 0,0000005; \qquad \beta_1 < 0,00000045.$$

Erreur de a' :

$$\frac{0,75\alpha_1}{9} < 0,0000004; \qquad \alpha_1 < 0,0000048.$$

Détails du calcul. — Effectuons la division abrégée de 0,75 par 3,14159 à 0,0000001 près :

750000000	314159000
121682000	2387326
27434300	
2301580	
102467	
8222	
1940	
56	

Nous trouvons ainsi le nombre 0,2387326.

Cherchons maintenant la racine cubique de ce nombre à 0,000001 près; commençons par chercher, à une unité près, la racine de $0,2387326 \times 10^{18}$. Nous avons six chiffres à trouver : cherchons directement les quatre premiers, ce qui nous donne le nombre 6203. Pour avoir les deux derniers chiffres, il suffit de diviser 5862323300 par 115331187 ou, par la division abrégée, 5862 par 1153.

2387326000000000000	6203		
216	$3 \times 6^2 = 108$	182	
		2	
22732		364	364
22328		10800	
404600000		11164	11164
345976767		2	4
58623233		22328	11532
	$3 \times 620^2 = 1153200$	1863	
		3	
		5589	5589
		115320000	
		115325589	115325589
		3	9
		345976767	115331187

5862	1153
97	50

Le rayon cherché est donc $0^m,620350$ à 0,000001 près.

Remarque. — Signalons une circonstance qui peut se présenter dans l'extraction abrégée de la racine carrée ou cubique, circonstance analogue à celle que nous avons déjà indiquée pour la division abrégée.

Soit, par exemple, à *trouver à* 0,0001 *près la racine carrée de* 2,28.

Il y a cinq chiffres à trouver; cherchons directement les trois premiers :

22800	150
128	25.5
300	300.0

Les trois premiers chiffres donnent le nombre 150, et le dernier reste partiel est 300. Pour avoir les deux derniers chiffres, divisons, conformément à la règle abrégée, 30000 par 300; le quotient, au lieu d'avoir deux chiffres, en a trois : c'est le nombre 100. Il faut dans ce cas forcer d'une unité le dernier chiffre trouvé directement et remplacer par des zéros ceux qui restaient à déterminer. Le résultat est alors 1,5100.

CHAPITRE V.

Application de l'Algèbre à la théorie des erreurs.

61. Dans le but de conserver à tous les raisonnements et à tous les calculs faits dans les précédents Chapitres un caractère strictement arithmétique, nous avons soigneusement évité de faire intervenir l'algèbre.

En supposant connus quelques théorèmes fondamentaux d'algèbre, on peut faire dépendre d'une formule unique toutes les formules d'erreur absolue.

Tout d'abord, si a est un nombre exact, une valeur approchée a' du nombre a peut toujours s'écrire $a' = a + \alpha$, α désignant l'erreur commise. Si cette erreur est positive, a' est approché p. e.; si elle est négative, a' est approché p. d. Cette seule convention permet de simplifier bien des démonstrations.

Ainsi, soient deux nombres approchés a' et b'; considérons le produit $a'b'$. On a

$$a' = a + \alpha, \qquad b' = b + \beta,$$
$$a'b' = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + (b\alpha + a'\beta).$$

L'erreur $a'b' - ab$ est donc, dans tous les cas, égale à $b\alpha + a'\beta$, et une limite supérieure de cette erreur est $b_1\alpha_1 + a_1\beta_1$.

Mais on peut aller plus loin. L'erreur d'une expression numérique peut être regardée comme l'accroissement algébrique éprouvé par une fonction $f(a, b, c, \ldots)$ lorsqu'on y remplace les nombres exacts $a, b, c, \ldots$ par des valeurs approchées $a', b', c', \ldots.$

Si, par exemple, l'expression considérée renferme trois nombres a, b, c, l'erreur ε est

$$f(a', b', c') - f(a, b, c).$$

On a identiquement

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(a', b', c') - f(a, b, c) \\ &= f(a', b', c') - f(a, b', c') \\ &\quad + f(a, b', c') - f(a, b, c') + f(a, b, c') - f(a, b, c). \end{aligned}$$

Or, la formule des accroissements finis, appliquée à chacune des différences du second membre de l'identité qui précède, donne

$$\begin{aligned} f(a', b', c') - f(a, b', c') &= (a' - a) f'_a(a'', b', c'), \\ f(a, b', c') - f(a, b, c') &= (b' - b) f'_b(a, b'', c'), \\ f(a, b, c) - f(a, b, c) &= (c' - c) f'_c(a, b, c''), \end{aligned}$$

a'', b'', c'' étant respectivement compris entre a et a', b et b', c et c'. Ajoutons membre à membre, et nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (a' - a) f'_a(a'', b', c') \\ &\quad + (b' - b) f'_b(a, b'', c') + (c' - c) f'_c(a, b, c''). \end{aligned}$$

Cherchons alors une limite supérieure de ε. Commençons par remarquer que les nombres figurant entre parenthèses dans les dérivées partielles sont tous compris entre les limites inférieures et supérieures des nombres a, b, c. Remplaçons-les alors par l'une ou

l'autre de ces limites de manière à forcer la valeur absolue de chacune des dérivées, substituons ensuite à $a' - a$, $b' - b$, $c' - c$ leurs limites supérieures α_1, β_1, γ_1, et prenons tous les termes avec le signe $+$: nous aurons une limite supérieure de ε. Si nous désignons par $(f'_a)_1$, $(f'_b)_1$, $(f'_c)_1$ les limites supérieures trouvées pour les valeurs absolues des dérivées, il vient

$$\varepsilon < (f'_a)_1 \alpha_1 + (f'_b)_1 \beta_1 + (f'_c)_1 \gamma_1.$$

Même raisonnement s'il y a moins ou plus de trois nombres a, b, c.

Avec cette formule générale, on peut traiter tous les problèmes d'erreur pourvu que les différentes dérivées partielles soient des fonctions algébriques. Nous en donnons ci-dessous, d'après M. Guyou, un exemple :

En mesurant l'hypoténuse a et le côté b d'un triangle rectangle ABC, *on a trouvé*

$$a = 75^{\text{m}} \quad \text{à} \quad \pm 0{,}2 \text{ près},$$
$$b = 32^{\text{m}} \quad \text{à} \quad \pm 0{,}1 \text{ près}.$$

On demande l'approximation avec laquelle on peut obtenir l'angle B.

On a

$$b = a \sin B ;$$

d'où

$$B = \arcsin \frac{b}{a},$$

$$f'_a = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \frac{b}{a^2} = -\frac{b}{a\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$f'_b = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

En valeur absolue, on aura

$$f'_a < \frac{32,1}{74,8\sqrt{74,8^2 - 32,1^2}},$$

$$f'_b < \frac{1}{\sqrt{74,8^2 - 32,1^2}}.$$

En effectuant les calculs, on obtient

$$f'_a < 0,0065, \qquad f'_b < 0,015,$$

et, par conséquent, pour l'erreur ε de l'angle B,

$$\varepsilon < 0,0065 \times 0,2 + 0,015 \times 0,1, \qquad \varepsilon < 0,0028.$$

L'erreur ε est ainsi exprimée en fonction du rayon; il faudra donc, pour obtenir le résultat en unités de degrés, multiplier 0,0028 par $\frac{180}{\pi}$; on a ainsi, en degrés,

$$\varepsilon < 0°,163$$

ou, en minutes et secondes,

$$\varepsilon < 9'47''.$$

62. Il est bon de remarquer qu'on peut établir aussi très simplement une formule générale d'erreur relative.

Considérons par exemple (n° 33) l'expression numérique $N = \frac{a^k \sqrt[m]{b}}{c^h \sqrt[n]{d}}$.

En prenant les logarithmes népériens des deux membres, on a

$$LN = kLa + \frac{1}{m}Lb - hLc - \frac{1}{n}Ld.$$

Lorsqu'on remplace a, b, c, d par des valeurs approchées a', b', c', d', on a, N' étant la nouvelle valeur de l'expression considérée,

$$LN' = kLa' + \frac{1}{m}Lb' - hLc' - \frac{1}{n}Ld'.$$

En retranchant membre à membre, et en appliquant la formule des accroissements finis aux accroissements des logarithmes des nombres N, a, b, c, d, nous aurons

$$\frac{N'-N}{N''} = k\frac{a'-a}{a''} + \frac{1}{m}\frac{b'-b}{b''} - h\frac{c'-c}{c''} - \frac{1}{n}\frac{d'-d}{d''},$$

N'', a'', b'', c'', d'' étant respectivement compris entre N et N', a et a', b et b', etc. Les fractions ci-dessus ne sont pas exactement les erreurs relatives des nombres N, a, b, c, d, mais elles en diffèrent très peu : ainsi la fraction $\frac{N'-N}{N''}$ est égale au produit de l'erreur relative $\varepsilon' = \frac{N'-N}{N}$ par la fraction $\frac{N}{N''}$ qui est très voisine de l'unité dans la pratique. Il en résulte que, si l'on remplace a'', b'', c'', d'' par leurs limites inférieures, et si l'on prend tous les termes du second membre avec le signe +, on a, avec une exactitude suffisante,

$$\varepsilon' < k\alpha'_1 + \frac{\beta'_1}{m} + h\gamma'_1 + \frac{\delta'_1}{n}.$$

On démontre ainsi d'un seul coup toutes les formules d'erreur relative.

EXERCICES.

---

1. Les nombres 57,83, 45719, 0,005361 sont connus chacun à une unité près de leur dernier chiffre à droite : trouver une limite supérieure de leur erreur relative.

2. Le nombre 715,58063 est affecté d'une erreur inférieure à 0,0001; combien a-t-il de chiffres exacts? En déduire une limite supérieure de son erreur relative.

3. Soit le nombre approché 786,48935781; indiquer le nombre de ses chiffres exacts en supposant que son erreur relative a pour limite supérieure une des fractions

$$\frac{1}{10000}, \quad \frac{1}{40000}, \quad \frac{1}{90000}, \quad \frac{1}{529341}, \quad \frac{67}{21879345}.$$

4. Avec quelle approximation peut-on connaître la hauteur d'un parallélépipède rectangle dont le volume est $12^{m^3},789347$ et la base $5^{m^2},4912$, sachant que chacun de ces nombres est connu à une unité près de son dernier chiffre?

5. Avec quelle approximation peut-on connaître le rayon d'une circonférence dont l'aire est $2^{m^2},278$ à une unité près de son dernier chiffre, sachant qu'on emploie pour π le nombre 3,1416?

6*. Avec quelle approximation peut-on calculer l'angle x donné par l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

dans laquelle les nombres $a = 1,2$, $b = 2,7$, $c = 1,8$ sont connus à une unité près de leur dernier chiffre?

7. On connaît $\frac{1}{\pi}$ avec 7 chiffres exacts; sur combien de chiffres exacts peut-on compter dans la valeur de π qu'on en déduit?

8. Calculer $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ avec deux décimales exactes.

9. Calculer le produit

$$227,4172189540 3 \times 51,6301798857$$

à 1 dix-millième près.

10. Calculer à 1^{cm^2} près la surface d'une sphère dont le rayon est $71^m,592$ à une unité près de l'ordre de son dernier chiffre.

11. Calculer à $\pm 0{,}001$ près les côtés du triangle équilatéral, des décagones et des pentagones inscrits dans une circonférence de rayon 1^m.

12. Calculer avec cinq chiffres exacts la somme

$$289{,}73818 + 678{,}4152.$$

13. Calculer à $\pm 0{,}0001$ près la différence $\pi - \sqrt{2}$.

14. Calculer le nombre

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

avec sept décimales exactes, sachant que, lorsqu'on s'arrête au terme $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$, l'erreur commise est inférieure à

$$\frac{1}{n \times 1.2.3\ldots n}.$$

15. Calculer $\sqrt[8]{5}$ à 0,01 près.

16. Calculer le nombre π à 0,0001 près, sachant que

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886\ldots.$$

17. Calculer à $\pm 0{,}035$ la valeur de

$$N = \sqrt{\frac{45 \times 50{,}213642}{3{,}1415926}}.$$

18. Calculer à $\pm 0{,}02$ la valeur de

$$N = \frac{(0{,}11702\pi + 1{,}43115)^2}{\sqrt{2\sqrt{3} + 5{,}01264}}.$$

19. Pour trouver le rayon d'une sphère solide, on a, d'un point P de sa surface, avec un compas dont les pointes sont distantes de 10^{cm}, décrit une circonférence de la sphère. Sur cette circonférence on a pris trois points A, B, C, dont les distances respectives sont 15^{cm}, 8^{cm} et $11^{cm},7$. Calculer à 1^{cm} près le rayon de la sphère solide.

20. On suppose que le demi-grand axe de la Terre est égal à $a = 6378393^{m}$ et le demi-petit axe à $b = 6356^{km},549$. Calculer à $\frac{1}{10^8}$ près l'aplatissement terrestre $\frac{a-b}{a}$. Quelle est l'erreur commise quand, au lieu du résultat trouvé, on prend le nombre $\frac{1}{292}$?

21. On prend pour longueur d'une demi-circonférence la somme des côtés du carré et du triangle équilatéral inscrits dans cette circonférence. Trouver une limite supérieure de l'erreur commise.

22. Le périmètre du triangle rectangle qui a pour côtés les $\frac{3}{5}$ et les $\frac{6}{5}$ du diamètre donne une valeur approchée de la circonférence. Trouver une limite supérieure de l'erreur commise.

23. Aux deux extrémités du diamètre d'un cercle, on mène dans le même sens deux perpendiculaires au diamètre, l'une égale au triple du rayon, l'autre au tiers du côté du triangle équilatéral inscrit : montrer que la droite joignant leurs deux extrémités est égale à la demi-circonférence, à moins de $\frac{1}{10000}$ près, par défaut.

24. Évaluer $\sqrt[4]{\pi}$ à 0,01 près.

25. Dans l'équation $x^2 - 2kx - h = 0$, les nombres

$$k = 0{,}117 \quad \text{et} \quad h = 0{,}04$$

sont connus à une unité près de l'ordre de leur dernier chiffre à droite. Trouver une limite supérieure de l'erreur avec laquelle on peut calculer la racine positive de cette équation.

26. Calculer à moins de 0,01 le produit $1000\pi(\sqrt{5} - 1)$.

27. Calculer, avec la plus grande approximation possible, le quotient $\frac{4{,}723}{3{,}1416}$, sachant que ces deux nombres sont approchés respectivement par défaut et par excès à moins d'une unité de leur dernier chiffre à droite.

28. Calculer $\sqrt[3]{851 + \sqrt{2}}$ à 0,1 près.

29. Les deux nombres 4897,85 et 235,786 sont l'un et l'autre affectés d'une erreur qui peut aller jusqu'à 2 unités de l'ordre de leur dernier chiffre, en plus ou en moins. On demande de trouver le produit de ces deux nombres, en se bornant à calculer les chiffres sur l'exactitude desquels on peut compter.

30. Les milieux des côtés d'un hexagone régulier sont les sommets d'un deuxième hexagone régulier. Connaissant la surface du second hexagone, égale à 4^{dm^2}, calculer à 0,001 près le côté du premier.

31. Calculer à $\pm$ 0,00001 le quotient

$$\frac{4\pi^3 - 24\pi}{\pi^4 - 12\pi^2 + 24}.$$

32. Calculer à $\pm$ 0,000001 l'expression numérique

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right).$$

33. Calculer à 0,001 près le nombre

$$\frac{e}{\sqrt{\pi}} \qquad (e = 2{,}718281828\ldots;\ \pi = 3{,}14159265\ldots).$$

34. Calculer $\pi^2\sqrt{3}$ avec une erreur relative plus petite que 0,01.

35. Calculer $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ à moins de $\frac{1}{100}$ de sa vraie valeur.

36. On sait que le volume d'un cône est $3^l,576$; son rayon est $0^m,541$; on prend pour π la valeur 3,1415; avec quelle erreur relative peut-on calculer la hauteur de ce cône, sachant que chacun des nombres donnés est approché à une unité près de l'ordre de son dernier chiffre à droite?

37. Les valeurs approchées à $\frac{1}{10^6}$ près, par défaut, de deux nombres π et e sont 3,141592 et 2,718281; trouver avec deux décimales exactes les valeurs de $\frac{\pi^2}{e}$, $\pi^2 e$, $\frac{\pi}{e^2}$.

38. En mesurant une barre de cuivre à une température de 25°, on a trouvé 2,7435; on ignore le sens de l'erreur, qui est inférieure à $\frac{1}{10^4}$; quelle sera la longueur de cette barre à 0°? On se servira de la formule

$$l = l_0(1 + at),$$

où $a = \frac{1798}{10^8}$.

39. Montrer que l'erreur relative d'une somme ou d'une différence est comprise entre la plus petite et la plus grande des erreurs relatives de ses termes.

40. Calculer $\sqrt{5} + \pi + \sqrt[4]{11}$ à $\frac{1}{9000}$ de sa vraie valeur.

41. Un corps tombe librement d'une hauteur de 15^m dans le vide. Évaluer le temps de chute et la vitesse acquise avec l'approximation maximum, sachant que $g = 9,8094$ à 1 dix-millième près.

42. Limite de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{\frac{0,036171}{0,036169}}$ par 1.

43. Prouver qu'en prenant $1+\frac{\alpha}{2\beta}$ pour racine carrée du nombre $1+\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}<1\right)$ on commet une erreur relative inférieure à $\frac{\alpha^3}{8\beta^2}$.

44. Calculer à $\pm 0{,}001$, par les opérations abrégées, le produit et le quotient des nombres

$$657{,}3189954302 \quad \text{et} \quad 0{,}000045667128913.$$

45. Calculer à $\pm 0{,}00001$, par les opérations abrégées, la racine carrée et la racine cubique de π.

ÉCOLES D'ARTS ET MÉTIERS.

1885. — Calculer à moins de 1^{cm} près le périmètre d'un dodécagone inscrit dans un cercle de $1^{m},56$ de diamètre.

1886. — Un polygone irrégulier dont les côtés sont tous tangents à une circonférence de $0^{m},85$ de rayon a un périmètre de $6^{m},80$. Calculer à 1^{cm} près le côté de l'hexagone régulier de surface équivalente.

1887. — Calculer à 0,01 près le côté du carré équivalent au triangle équilatéral dont l'apothème a $2^{m},19$ de longueur.

1888. — On demande de calculer à $\frac{1}{500}$ près la hauteur et à $\frac{1}{10000}$ près le volume d'une pyramide régulière sachant que : 1° la base de cette pyramide est un hexagone de $1^{m},47$ de côté ; 2° l'aire latérale est quadruple de celle de la base.

1889. — Sachant que le mètre est la dix-millionième partie du quart de la circonférence d'un grand cercle de la Terre supposée sphérique, on demande de calculer la surface de la Terre à moins de 1^{km^2} près.

1890. — Calculer avec trois décimales exactes la valeur de

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}.$$

1891. — Calculer à 1^{mm} près les dimensions du litre, du décalitre et de l'hectolitre qu'on emploie pour les matières sèches, sachant que ces mesures ont la forme de cylindres droits à base circulaire et que la hauteur de chacune d'elles est égale au diamètre de la base.

1892. — On demande, à $\frac{1}{10000}$ près de sa valeur totale, le poids d'un corps en forme de prisme hexagonal régulier dont la hauteur est sextuple du côté de la base, sachant que ce côté a $0^{m},006$ de longueur et que la densité du corps est 2,7.

1894. — Quelles doivent être à 1^{cm} près les valeurs du côté d'un cône dont le diamètre est égal au côté : 1° pour que sa surface convexe soit de 1^{m^2}? 2° pour que son volume soit de 1^{m^3}?

1895. — Un parallélépipède rectangle a ses trois dimensions respectivement proportionnelles à 1, 2, 3, et la superficie totale de ses faces est 25^{dm^2}. Calculer à moins de $\frac{1}{10000}$ près chacune de ses trois dimensions et à moins de $\frac{1}{100}$ près le volume de ce parallélépipède.

1896. — Sachant que la durée de chacune des oscillations d'un pendule est donnée par $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, l'unité de temps étant la seconde et l'unité de longueur le mètre, calculer à $\frac{1}{1500}$ près la valeur de g pour un lieu où l'on a observé que la longueur du pendule dont chaque oscillation dure 1 seconde est 994^{mm}.

1897. — Un observateur, voulant calculer la distance qui le sépare du point d'explosion d'une torpille, compte 10 secondes entre l'instant où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'eau et l'instant où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'air. Connaissant la vitesse du son par seconde dans l'air (340^{m}) et dans l'eau (1430^{m}), déterminer à une unité près du second ordre décimal à combien de kilomètres de l'observateur se trouvait la torpille.

ÉCOLE NAVALE.

1885. — Calculer le rayon du cercle dont la surface vaut 1^{ha}; on n'emploiera que les deux premières décimales du nombre π et l'on ne conservera au résultat que les chiffres exacts.

1886. — Calculer à 0,001 près le produit $\pi\sqrt{3}$.

1888. — Calculer à 0,01 près, en centièmes, la valeur de

$$\sqrt{\frac{\pi \times 9,87654321}{17}}.$$

1889. — Calculer à 0,01 près le cosinus de l'angle B d'un triangle ABC rectangle en A, dont les côtés b et c ont pour longueurs

$$b = 115,6543, \qquad c = 17,4326.$$

1890. — Calculer à $\pm 0,001$ la valeur de $\tang 15^\circ$ par la formule $\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}}$.

1891*. — En mesurant l'hypoténuse a et le côté b d'un triangle rectangle ABC, on a trouvé

$$a = 75^m \text{ à } \pm 0^m,2 \text{ près}, \qquad b = 32^m \text{ à } \pm 0^m,1 \text{ près};$$

on demande l'approximation avec laquelle on peut obtenir l'angle B ([1]).

1892. — Calculer à 0,001 près la tangente de 18°, en remarquant que le sinus de cet arc est la moitié du côté du décagone régulier inscrit.

([1]) *Voir* n° 61, p. 76.

1893. — Calculer à 0,001 près la valeur de

$$N = \sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

1894*. — Déterminer l'approximation avec laquelle on peut obtenir l'angle B d'un triangle ABC rectangle en A connaissant à 1^{dm} près les côtés $b = 64^m,6$ et $c = 157^m,5$.

1895. — Calculer à 0,001 près les racines de l'équation

$$x^4 + \pi x^2 - 7,6 = 0.$$

1896. — Les rayons des deux bases d'un tronc de cône et son apothème ont respectivement pour longueurs, à 1^{cm} près,

$$R = 17^m,64, \qquad r = 6^m,85, \qquad a = 13^m,23.$$

Avec quelle approximation pourra-t-on obtenir sa surface totale?

1897*. — En mesurant deux longueurs a et b on a trouvé

$$a = 62,5 \text{ à } \pm 0,2 \text{ près} \qquad \text{et} \qquad b = 41,2 \text{ à } \pm 0,1 \text{ près}.$$

Avec quelle approximation pourra-t-on obtenir le logarithme vulgaire de $\frac{a}{b}$? Le module de transformation des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est 0,43429.

1898*. — Pour obtenir la distance horizontale d'un point quelconque M à un point A, un observateur mesure l'angle $\widehat{AMB}$ sous lequel est aperçue une règle verticale AB de $4^m,50$; l'instrument de mesure donne les angles à 1 minute près. On demande jusqu'à quelle distance on pourra compter sur une approximation de 1^m.

1899. — Les dimensions d'un bassin tronconique, approchées par excès, sont : rayons des bases $6^m,3$ et $3^m,1$, hauteur $5^m,9$. On demande à quelle approximation commune il faudrait mesurer ces dimensions pour qu'on pût en déduire le volume du bassin à 1^{m^3} près.

1900. — Calculer à $\frac{1}{100}$ de seconde près la durée de l'oscillation d'un pendule de 300^{m} avec

$$g = 9,8094 \qquad \text{(unités : mètre et seconde).}$$

1901. — On sait que le nombre des vibrations transversales exécutées dans un temps donné par une corde cylindrique tendue est directement proportionnel à la racine carrée du poids qui la tend et inversement proportionnel à sa longueur, à son rayon et à la racine carrée de sa densité.

Cela posé, une corde de fer de densité 7,7 ayant $3^{dm},91$ de longueur, une section de $1^{mm^2},21$ et tendue par un poids de 7218^{g} a exécuté dans un certain temps 5329 vibrations.

On demande combien de vibrations exécutera dans le même temps une corde de cuivre dont la densité est 8,8, de $412^{mm},3$ de longueur, pesant $3^{g},52$ et tendue par un poids de $8^{kg},309$.

1905. — 1° Définition de l'erreur absolue et de l'erreur relative. Déterminer la limite supérieure de l'erreur commise sur un quotient, connaissant la limite supérieure des erreurs commises sur le dividende et le diviseur. 2° Calculer $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ à 0,0001 près ($\pi = 3,1415926$) (1).

---

(1) *Voir* n° 46, 1°, p. 50.

FIN

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
37515 Quai des Grands-Augustins, 55.



